



ترجمه:

غلامرضا یاسی پور

نظریهٔ مقدماتی ها مجموعه

مقدمه

جرج کانتور^۱ در ۱۸۹۵ در آغاز اثرش

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

تعریف زیر را آورده است:

منظورمان از مجموعه "set" هر گردابه^۲ M از اشیای معین، متمایز m از برداشت یا

تصورمان (که عنصرها "elements" M نامیده می شوند) به صورت یک کل است.

به این ترتیب، مثال های مجموعه ها عبارت اند از: Z ، مجموعهٔ اعداد درست، که در

این جا اعداد صحیح "integers" نامیده می شوند؛ C, R, Q ، به ترتیب، مجموعه های جمیع اعداد

گویا rational numbers، جمیع اعداد حقیقی "real numbers" و جمیع اعداد مختلط "complex

"numbers"، M ، مجموعه ای شامل جمیع قمرهای مریخ و حتی H ، مجموعهٔ جمیع اختاپوس های دویایی که

اول اردیبهشت گذشته از آبادان دیدن کرده اند.

نیاز کانتور برای چنین تعریفی در حدود ۱۸۷۲ از تحقیقاتش در مورد یکتایی ممکن نمایش توابع توسط توابع

مثلاثی برخاسته بود. در موقع خود آشکار شد که تمام ریاضیات را می توان بر پایه ای مجموعه - نظریه ای - "set

"theorie base" مبتنی کرد. به خصوص کانتور و ریچارد دکنند، در اثرشان "Stetigkeit und irrationale

Zahle" (۱۸۷۲)، نشان دادند چگونه اعداد گنگ "irrational numbers" تا اندازه ای ناملموس (یعنی آن

عنصری از R که در Q نیستند) را می توان با استفاده از مفهوم مجموعه ها، بر حسب Q اعتبار داد. و گوتلوب

فرگه "Gottlob Frege" (۱۸۸۴) میرهن کرد چگونه اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ... را می توان با عبارت های مجموعه

- نظریه ای تعریف کرد. علاوه بر این، مفهوم تابع را نیز می توان از لحاظ مجموعه - نظریه ای تعریف نمود.

بنابراین تعجب آور نیست که امروزه نمادگذاری، اصطلاحات و مفهوم های ساده تر نظریهٔ مجموعه ها، قسمت

اصلی زبانی را تشکیل می دهند که مباحث ریاضی معاصر بر آن بنا شده اند.

مجموعه ها

کلمه های مجموعه، "set"، گردابه "collection" و دسته

"aggregate" را مترادف در نظر می گیریم. گاهی عنصرهای یک

مجموعه را عضوها "members" آن می نامیم. اگر A یک مجموعه

و شیء a عنصری از A باشد، می نویسیم $a \in A$. معمولاً نماد

$a \in A$ را به صورت " a متعلق است به A " می خوانیم. اگر a عضو

A نباشد، می نویسیم $a \notin A$ و می گوئیم " a به A متعلق نیست".

به این ترتیب می توان نوشت:

$$3 \in \mathbb{Z}, \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}, \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}, \pi \in \mathbb{R}, \pi \notin \mathbb{Q}$$

مجموعه ها را می توان با فهرست کردن عضوهایشان بین دو

آکولاد نیز توصیف کرد. البته توصیف مجموعه های شامل

بی نهایت عضو به این طریق غیر ممکن است. در چنین مواقعی،

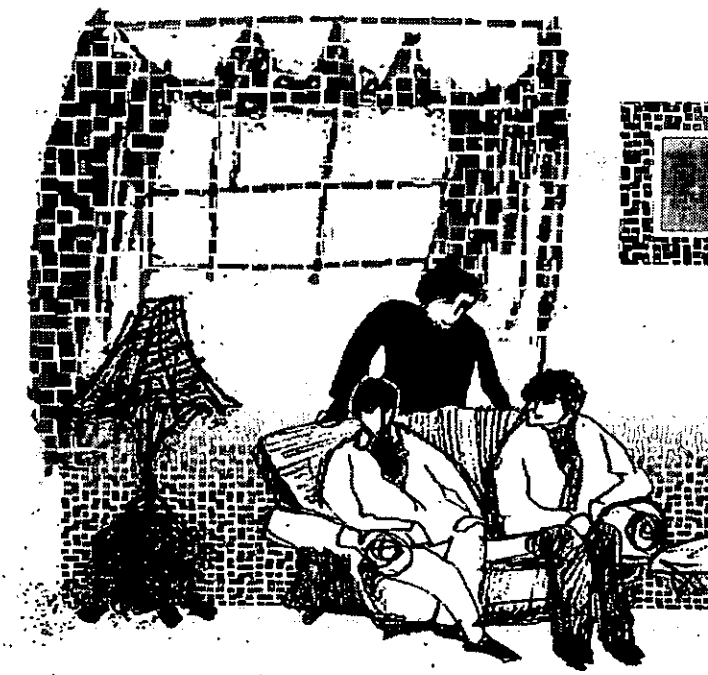
ممکن است وسوسه شده بنویسیم $\{x:P(x)\}$ که در آن $P(a)$ مشخص می‌کند که شیء a دارای ویژگی P است و در نتیجه در مجموعه مورد نظر قرار دارد. ^۲ به این ترتیب Z^+ ، مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Z^+ = \{x: x \in Z, x > 0\}$$

(این نماد به این صورت خوانده می‌شود Z بعلاوه، مجموعهٔ تمام x ها است، به طوری که x به Z تعلق دارد و x بزرگ‌تر از صفر است.) گرچه گاهی نیز نماد:

$$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

به کار می‌رود که سه نقطهٔ آن عبارت مبهم و «غیره» را مشخص



می‌کند. مجموعه‌های متناهی کوچک را می‌توان به چند طریق نمایش داد. فی‌المثل داریم.

$$M = \{x \text{ فوبوس است یا } x \text{ دیموس است}\}$$

یا:

$$M = \{x \text{ ماه مریخ است}\}$$

اگر A و B مجموعه باشند و اگر هر عنصر A به مجموعهٔ B متعلق باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ "subset" ای از B یا A مشمول "contained"، در B است، و می‌نویسیم $A \subseteq B$ (یا $B \supseteq A$ ، مورد اخیر به صورت « B شامل A » است. نیز خوانده

می‌شود). در حالت خاص به ازای هر مجموعهٔ A ، $A \subseteq A$ و اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$.

با معلوم بودن $A \subseteq B$ ، اگر بدانیم (و اگر برایمان مهم باشد!) که B شامل عنصرهایی غیر واقع در A است، آن‌گاه می‌نویسیم $A \subset B$ (یا $B \supset A$) یا حتی اگر تأکید بیشتری لازم باشد $A \subsetneq B$ (یا $B \supsetneq A$). در این صورت A را زیرمجموعهٔ سَره "proper subset" می‌نامیم. به این ترتیب، مطابق با تأکید لازم می‌نویسیم $Z \subsetneq Q$ یا $Z \subset Q$.

اگر $A \subseteq B$ زیرمجموعهٔ B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ (توجه داشته باشید که $A \not\subseteq B$ و $A \subseteq B$ و تنها وقتی که شامل حداقل یک عضو باشد که در B نیست).

A و B را برابر "equal" می‌گوییم و می‌نویسیم $A=B$ ، وقتی و تنها وقتی که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ همزمان برقرار باشند. نتیجه می‌شود که یکی از طریق‌های مفید اثبات برابری دو مجموعهٔ A و B اثبات $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو، است.

اخطار: سعی داشته باشید $\in$ را با $\subseteq$ اشتباه نکنید. به بیانی تقریبی: $\in$ در رابطه با مجموعه با عنصر هایش؛ و $\subseteq$ در رابطه با مجموعه با زیرمجموعه‌هایش به کار می‌رود. در توضیح این مطلب، فرض می‌کنیم:

$$A = \{1, \{1\}, 2, \{3, 4\}, Z\}$$

در این صورت A مجموعه‌ای با پنج عنصر $1, \{1\}, 2, \{3, 4\}, Z$ است. در نتیجه:

$$1 \in A, 1 \notin A, \{1\} \in A, \{1\} \subseteq A, \{2\} \notin A, \{2\} \subseteq A$$

$$\{3\} \notin A, \{3\} \subseteq A, \{3, 4\} \in A, \{3, 4\} \subseteq A, Z \in A, R \subseteq A$$

(در ضمن، مجموعه‌هایی چون $\{2\}$ که شامل دقیقاً یک عنصرند، منفرد "Singleton" نامیده می‌شوند.)

اکنون مجموعه‌های

$$F = \{x: x \in Z, x^2 < 0\}, G = \{ \}$$

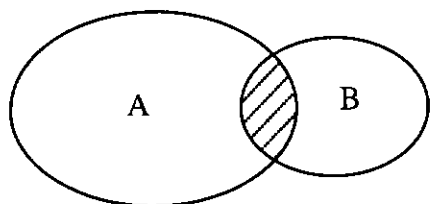
و H پیش از این ذکر شده را در نظر می‌گیریم. آشکار است که هیچ‌یک از آنها اصلاً شامل عضوی نیست. مجموعهٔ بدون عضو را مجموعهٔ تهی "empty set" می‌نامیم. به رغم تفاوت‌های واقع در تعریف H, G, F می‌توان نشان داد

اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها را می‌توان بر حسب ناحیه‌های سایه خورده واقع در شکل ۱ در نظر گرفت؛ چنین شکل‌هایی را نمودارهای ون "Venn diagrams" می‌نامیم.

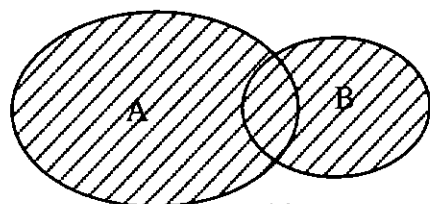
اگر مجموعه سوم C ای را معرفی کنیم و ناحیه مشترک $A \cup B$ و C را سایه بزنیم (شکل ۲). آشکار می‌شود که مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ برابرند. این مطلب را می‌توان با استدلالی که به شکل وابسته نباشد، تحقیق کرد. [شکل می‌تواند فریب‌دهنده باشد. اثبات تصویری مورد بحث در صورتی که، مثلاً، $C \cap B = \emptyset$ یا $A \subseteq B$ باشد، چه اعتباری دارد؟

بسط تعریف اجتماع و اشتراک به گردهایی بزرگ‌تر، اما متناهی، حتی نامتناهی از مجموعه‌ها، بدون اشکال است. به عنوان مثال، اگر به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$

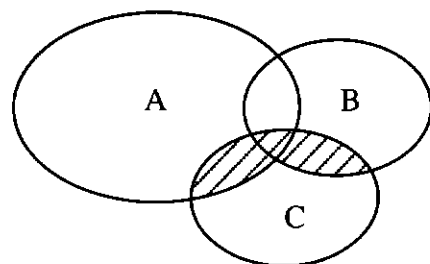
$$S_n = \left\{ x : x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$$



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

که تنها یک مجموعه تهی وجود دارد. برای اثبات این و چیزی هم بیشتر از آن، فرض می‌کنیم $\emptyset$ مجموعه‌ای تهی و A مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت $\emptyset \subseteq A$ ، زیرا در غیر این صورت $\emptyset \not\subseteq A$ و بنابراین $\emptyset$ شامل عنصری است که در A یافت نمی‌شود.

اما این احمقانه است؛ زیرا $\emptyset$ دارای عضو نیست. اکنون فرض می‌کنیم $\emptyset_1$ مجموعه تهی دیگری باشد. از آن‌جا که $\emptyset$ تهی است $\emptyset \subseteq \emptyset_1$. از آن‌جا که $\emptyset_1$ تهی است $\emptyset_1 \subseteq \emptyset$. و این دو نابرابری، چون باهم در نظر گرفته شوند، مستلزم $\emptyset = \emptyset_1$ اند. به این ترتیب می‌توان از مجموعه تهی (یکتا) سخن گفت.

مسئله ۱. اشتباه استدلال زیر در اثبات $\emptyset \subseteq A$ چیست؟ در اثبات $B \subseteq A$ باید نشان دهیم هر عنصر B در A نیز موجود است. از آن‌جا که $\emptyset$ دارای عضوی نیست، نمی‌توان نشان داد که $\emptyset \subseteq A$ ؛ در نتیجه $\emptyset \not\subseteq A$.

فرض می‌کنیم A و B مجموعه باشند. در این صورت مجموعه‌های:

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B \text{ (یا هر دو)}\}$$

را به ترتیب، اشتراک "intersection" و اجتماع "union" A و B می‌نامیم. به این ترتیب اگر:

$$A = \{3, 1, 4\}$$

و

$$B = \{\pi, 4, \text{الیورکرامول}, 1\}$$

باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{1, 4\}$$

در حالی که:

$$A \cup B = \{3, 1, 4, \pi, \text{الیورکرامول}\}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که به ازای مجموعه‌های A و B داریم:

$$A \cap A = A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cup \emptyset = A$$

را تعریف کنیم، در این صورت، مجموعه عنصرهای مشترک
 جمیع S_n ها با $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ تعریف می شود. در واقع
 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ برابر $\{0\}$ ، مجموعه شامل یک عدد حقیقی ۰ است. در
 این جا S های گوناگون را با عنصرهای مجموعه Z^+ «شاخص دار»
 کرده ایم. می توانیم عنصرهای R^+ (تمرین ۶ را ملاحظه کنید) یا
 در واقع عنصرهای هر مجموعه را نیز به عنوان مجموعه شاخص
 "indexing set" به کار ببریم
 طریق دیگر ساختن مجموعه ای جدید از دو مجموعه قدیم A
 و B تعریف تفاضل "difference" آنهاست.

$$A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

در این صورت، در حالت خاص، مجموعه جمع عددهای
 حقیقی نا صفر را با $R \setminus \{0\}$ نمایش می دهیم.

تعریف بعدی توسط مختصات معرفی شده در صفحه حقیقی
 مطرح شده است. نقطه های واقع در صفحه حقیقی با جفت های
 عددهای حقیقی، و برعکس، چنان در نظر گرفته شده اند که اگر
 به نقطه های P و Q ، به ترتیب، مختصات (a_1, a_2) و (b_1, b_2) داده
 شوند، آن گاه P و Q وقتی و تنها وقتی منطبق می شوند که
 $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. در حالت خاص $(1, 2)$ و $(2, 1)$ متناظر یا
 نقطه هایی متمایزند. از آن جا که تنها تمایز بین $(1, 2)$ و $(2, 1)$
 ترتیبی است که عددهای ۱ و ۲ طبق آن نوشته شده اند به جفت های
 عددی چینی به صورت جفت های مرتب اشاره کنیم.

به صورت عمومی تر تعریف زیر را به دست می دهیم.

تعریف. فرض می کنیم A و B مجموعه باشند. در این
 صورت $A \times B$ مجموعه جفت های مرتب به صورت زیر است:

$$\{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$ را حاصل ضرب دکارتی A و B می نامیم. کلمه
 «مرتب» مستلزم این است که برابری عنصرهای (a, b) ، (c, d) ی
 واقع در $A \times B$ ، وقتی و تنها وقتی تعریف شود که $a = c$ و
 $b = d$ هر دو برقرار باشند.

(i) مفهوم جفت مرتب را می توان به روشی صرفاً مجموعه -
 نظریه ای "set - theoretic" توصیف کرد.

(ii) به طریقی مشابه می توان $A \times B \times C$ ، مجموعه
 سه تایی های مرتب "ordered triples" (a, b, c) را تعریف کرد که در

آن $a \in A$ ، $b \in B$ ، $c \in C$. شخص می تواند حتی حاصل ضرب
 دکارتی گردایه ای از بی نهایت مجموعه را تشکیل دهد.
 مثال. اگر $A = \{\pi\}$ ، $B = \{e, h\}$ ، آن گاه

$$A \times B = \{(\pi, e), (\pi, h)\}$$

توجه داشته باشید که $A \times B$ و $B \times A$ هریک
 $(3 \times 2 = 2 \times 3 = 6)$ عنصر دارند؛ اما $A \times B \neq B \times A$ چرا
 نیست؟

آخرین سخن درباره تولید مجموعه ها "set production":

تعریف. فرض می کنیم A مجموعه ای دلخواه باشد. با $P(A)$
 مجموعه جمیع زیرمجموعه های A را نمایش می دهیم. $P(A)$ به
 مجموعه توانی "power set" A موسوم است.
 مثال اگر $A = \{a, b, \gamma\}$ ، آن گاه:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\gamma\}, \{a, b\}, \{a, \gamma\}, \{b, \gamma\}, \{a, b, \gamma\}\}$$

توجه داشته باشید که A دارای سه عنصر است، در حالی
 که $P(A)$ ، 2^3 عنصر دارد.

پانویست

- جورج کانور (۳ مارس ۱۸۴۵ - ۶ ژانویه ۱۹۱۸).
- شاید شگفت انگیز باشد که تعریفی چنین ساده می تواند به تناقضاتی بینجامد. در واقع
 حتی کانتور نیز این موضوع را دریافت، اگرچه بهترین مثال در این مورد از آن ریاضیدان و
 فیلسوف انگلیسی برتراند راسل است که $p(x)$ را شرط $x \notin x$ در نظر گرفت. واضح
 است که $1 \notin 1$ ، $2 \notin 2$ ، بنابراین $R = \{x: x \notin x\}$ مطمئناً ناتمامی است. در این
 صورت، شخص می تواند بپرسد: «آیا R متعلق به R است؟» اگر چنین باشد، در این
 صورت R به علت این که عضوی از R است، در شرط $(x \notin x)$ صدق می کند؛ در
 نتیجه $R \notin R$. اگر نباشد، آن گاه در آزمون $x \notin x$ بازمی ماند و نتیجه
 می گیریم $R \in R$. به این ترتیب $R \in R$ وقتی که و تنها وقتی که $R \notin R$.
 اکیسومی سازی های گوناگونی از نظریه مجموعه ها (به خصوص اکیسومی سازی تسرملو
 "Zermelo")؛ برای اجتناب از ظهور چنین پارادوکس هایی طرح شده اند: جمیع
 مجموعه های تحت بررسی ما در طرح تسرملو پذیرفتنی اند.
- بعضی از ریاضیدانان برای اجتناب از اشتباه ممکن در کاربرد بعدی A شامل a
 است؛ در توصیف $a \in A$ گنجدید در "included in" راجح می دهند. این کاربرد
 دوگانگی «شامل»، بد، اما معمول است.