

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱

○

مقدمه

مسائلی که انسان در واقعیت با آن‌ها سروکار دارد، معمولاً دارای ابهام و نوعی عدم قطعیت هستند که به پیچیدگی در آن‌ها می‌انجامد. برای آن‌ها که بتوان موضوعی را به طور کامل تحلیل کرد، باید اطلاعات کافی و دقیق از آن داشت. ولی انسان در مواجهه با مسائل پیچیده در دنیای واقعی، چون اطلاعات دقیقی از آن‌ها ندارد، به شکل تقریبی ماهیت آن‌ها را تحلیل می‌کند. در این خصوص، پروفیسور لطفی زاده، بنیان‌گذار منطق و مجموعه‌های فازی بیان کرده است: «هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد، پیچیدگی آن سیستم کاهش پیدا می‌کند و درک و تحلیل از آن افزایش می‌یابد. وقتی پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش می‌یابد و ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم فراهم می‌شود.»

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی کمی دارند، چون میزان عدم قطعیت در آن‌ها کم است، می‌توان با استفاده از روابط ریاضی، رفتار آن‌ها را به شکل دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. ولی اگر سیستم قدری پیچیده شود، عدم قطعیت افزایش می‌یابد. در این حالت نمی‌توان تحلیل دقیقی از آن به عمل آورد. به منظور تحلیل مناسبی از این نوع سیستم‌ها، از رویکرد استدلال تقریبی فازی استفاده می‌شود. به همین لحاظ، به آن‌ها سیستم‌های «فازی» می‌گویند.

ورودی سیستم‌های فازی، اطلاعاتی فازی یا غیر دقیق هستند، یا آن‌که بررسی سیستم بر اساس استدلال تقریبی و به شکل فازی و غیر دقیق صورت می‌گیرد. نظریه‌ی فازی که به بررسی مفاهیم غیر دقیق می‌پردازد، دارای چهار بخش متفاوت است که عبارت‌اند از: ریاضی فازی، منطق و سیستم‌های فازی، تصمیم‌گیری فازی و هوش مصنوعی. ریاضی فازی به بررسی مجموعه‌های فازی و اعمال روی آن‌ها می‌پردازد و همان‌گونه که در قسمت‌های قبل اشاره شد، عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی فازی، با عددی موسوم به درجه‌ی عضویت بیان می‌شود که مقداری بین صفر و یک است. منطق فازی توسعه یافته‌ی منطق کلاسیک است که در آن به جای منطق دو ارزشی، از منطق چند ارزشی استفاده می‌شود. در تصمیم‌گیری فازی پارامترها، تابع هدف و قیود مسئله به شکل فازی هستند.

از جمله کاربردهای مهم نظریه‌ی فازی، در هوش مصنوعی و طراحی و ساخت ربات‌های هوشمند است که می‌توان با پردازش فازی، امکان انجام رفتارهایی شبیه انسان را در آن‌ها طراحی کرد.

در قسمت‌های قبل، مفاهیمی چون مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌ی فازی محدود، عدد فازی و اعمال روی مجموعه‌های فازی معرفی شدند. در این قسمت، ابتدا چند مفهوم در مجموعه‌های فازی را مطرح می‌کنیم:

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

در صورتی که ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی ۱ باشد، آن مجموعه‌ی فازی را نرمال و در غیر این صورت غیر نرمال می‌گویند. بنابراین اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد، آن‌گاه:

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

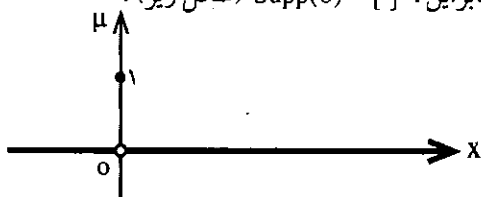
$$\exists x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

$$h(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

$$\mu_{\tilde{0}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

با این تابع عضویت است:

بنابراین: $\text{Supp}(\tilde{0}) = \{0\}$ (شکل زیر).



در قسمت قبل، تعریفی از اعداد فازی مطرح شد که زیرمن^۱ ارائه داده است. پس از آن، تعریف عدد فازی، به صورت زیر کامل شد:

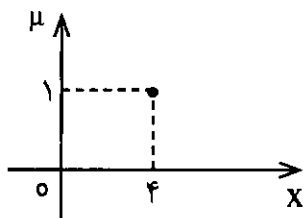
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گوئیم هرگاه:

(الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمال باشد؛

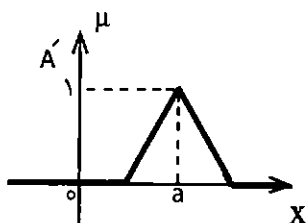
(ب) مجموعه‌ی α -برش $\tilde{A}$ ، یعنی A_α برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، بازه‌ای بسته باشد؛

(ج) تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ای کران دار باشد.

بنابر تعریف بالا، چون α -برش یک عدد فازی برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، مجموعه‌ای بسته، و هر مجموعه‌ی بسته، مجموعه‌ای محدب است، بنابراین هر عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است. ولی عکس این حالت برقرار نیست. یعنی می‌توان مجموعه‌ی فازی محدبی را مثال زد که یک α -برش آن باز یا نیم باز باشد. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از تابع عضویت یک عدد فازی را بیان می‌کنند. توجه می‌کنیم که اعداد حقیقی و بازه‌های حقیقی، حالات خاصی از اعداد فازی هستند.



یک عدد حقیقی قطعی (عدد ۴)

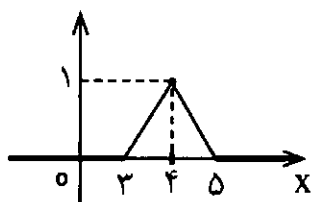


یک عدد حقیقی فازی (تقریباً ۴)

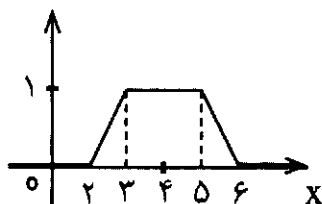
زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X که مقدار درجه‌ی عضویت اعضای این مجموعه ۱ باشد، «هسته‌ی مجموعه‌ی فازی» $\tilde{A}$ نام دارد. هسته‌ی $\tilde{A}$ را با $\text{Core}(\tilde{A})$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$\text{Core}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

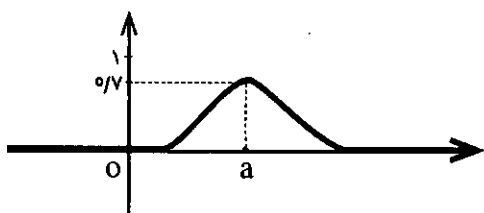
شکل‌های زیر، توابع عضویت نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال را نمایش می‌دهند. در هر یک از آن‌ها هسته و ارتفاع مشخص شده‌اند.



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \{4\}$



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = [3, 5]$



مجموعه‌ی فازی غیرنرمال با $h(\tilde{A}) = 0.7$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \emptyset$

هم چنین، اگر:

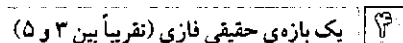
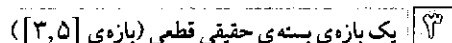
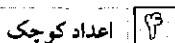
$$\tilde{A} = \{(2, 0/3), (3, 0/6), (4, 1), (5, 1), (7, 0/8), (9, 0/4)\}$$

آن‌گاه: $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \{4, 5\}$. بنابراین، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمالی را نمایش می‌دهد.

مفهوم دیگری که در مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، «مجموعه‌ی فازی سینگلتون» است که به مجموعه‌ی فازی با تکیه‌گاه یک عضو اطلاق می‌شود. بنابراین، $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی سینگلتون نام دارد، هرگاه:

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{a\}$$

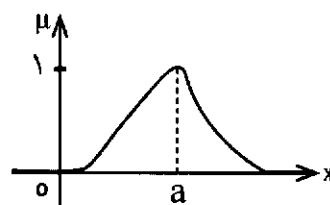
برای مثال، منظور از صفر سینگلتون، مجموعه‌ای فازی



قضیه: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی R باشد، آن گاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر و تنها اگر بازه‌ی بسته‌ی غیر تهی $[a, b]$ وجود داشته باشد که:

تابع عضویت هر عدد فازی، لزوماً همانند شکل های بالا
مقارن نیست. به نمونه های زیر از اعداد فازی توجه کنید:

یک عدد فازی زندگی شکل متقارن



۲۳ یک عدد فازی زنگی شکل غیرمتقارن

نمونه‌ای از یک عدد فازی با هسته ی $[a,b]$

اعداد بزرگی

با توجه به جمع و تفریق بازه‌های فازی خواهیم داشت:

$$(A+B)_\alpha = [2\alpha-1, 3-2\alpha] + [2\alpha+1, 5-2\alpha] \\ = [4\alpha, 8-4\alpha], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$(A-B)_\alpha = [2\alpha-1, 3-2\alpha] - [2\alpha+1, 5-2\alpha] \\ = [4\alpha-6, 2-4\alpha], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

حال از روی مجموعه‌های α -برش فوق توابع عضویت

$\tilde{A} + \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ را به دست می‌آوریم. فرض کنیم:

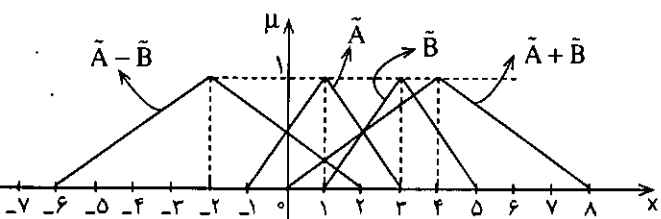
$\frac{x}{4} \geq \alpha$ از آنجا که $4\alpha \leq x \leq 8-4\alpha$ لذا $x \in (A+B)_\alpha$
به ازای $0 < x \leq 4$ و $\frac{8-x}{4} \geq \alpha$ به ازای $4 < x \leq 8$ بنابراین:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x > 8 \\ \frac{x}{4} & 0 < x \leq 4 \\ \frac{8-x}{4} & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -6, x > 2 \\ \frac{x+6}{4} & -6 < x \leq -2 \\ \frac{2-x}{4} & -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

به طور مشابه:

شکل زیر، توابع عضویت $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ ، $\tilde{A} + \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ را نمایش می‌دهد.



حال سؤالات زیر را مطرح می‌کنیم:

○ آیا حاصل تقریباً ۳+ تقریباً ۱ برابر با تقریباً ۴ می‌شود؟

○ آیا رابطه‌ی تقریباً ۳= تقریباً ۱+ (تقریباً ۱- تقریباً ۳) صحیح است؟

دو تابع عضویت مثال بالا، توصیفی از اعداد فازی تقریباً ۱ و تقریباً ۳ را نمایش می‌دهند. با توجه به تابع عضویت $\tilde{A} + \tilde{B}$ ، پاسخ سؤال اول مثبت است. مجموعه‌ی α -برش $(A+B)_\alpha$ به ازای چند α خاص در زیر آمده است:

$$(A+B)_\alpha = \begin{cases} [1/2, 6/8] & \alpha = 0/3 \\ [2/8, 5/2] & \alpha = 0/7 \\ 4 & \alpha = 1 \end{cases}$$

مبحثی با عنوان «حساب بازه‌ای» بررسی می‌شود. در ادامه، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو بازه‌ی حقیقی، هم چنین قرینه و وارون بازه‌ی فازی معرفی می‌شوند:

$$[a, b] + [c, d] = [a+c, b+d]$$

$$-[a, b] = [-b, -a]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + (-[c, d]) = [a-d, b-c]$$

با فرض آن‌که: $a \notin [a, b]$

$$[a, b]^{-1} = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

با فرض $c \notin [c, d]$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] \times [c, d]^{-1} = [a, b] \times \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c} \right]$$

$$= \left[\min\left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c} \right\}, \max\left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c} \right\} \right]$$

مثال:

$$[2, 6] + [1, 4] = [3, 10] \quad -[-7, 2] = [-2, 7]$$

$$[2, 6] - [1, 4] = [-2, 5] \quad [2, 6]^{-1} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right]$$

$$[-2, 2] \times [-3, -0.5] = [-6, 6]$$

$$[-1, 3] / [2, 5] = \left[\frac{-1}{5}, \frac{3}{2} \right]$$

حال فرض کنید، می‌خواهیم تابع عضویت مجموع و تفاضل دو عدد فازی مثلی شکل $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با توابع عضویت زیر را به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, x > 3 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3-x}{2} & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, x > 5 \\ \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

در این حالت، مجموعه‌های α -برش عبارت‌اند از:

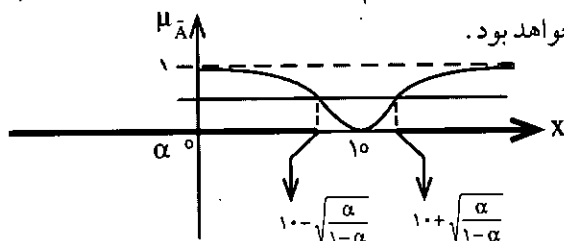
$$A_\alpha = [2\alpha-1, 3-2\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$B_\alpha = [2\alpha+1, 5-2\alpha], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

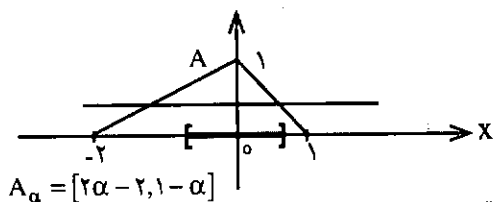
$$\begin{aligned}\mu_{\bar{A}}(x) \geq \alpha &\Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x-10}\right)^2} \geq \alpha \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{x-10}\right)^2 \leq \frac{1}{\alpha} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{x-10}\right)^2 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow (x-10)^2 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow |x-10| \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \text{یا } x-10 &\leq -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \leq 10 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x-10 \leq -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &\Rightarrow x-10 \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ یا } x \geq 10 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \geq 10 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \text{یا } x &\geq 10 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{\alpha} = (-\infty, 10 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] \cup [10 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, +\infty)$$

نمودار زیر توصیفی از تابع عضویت $\bar{A}$ و α -برش آن است. ملاحظه می‌کنیم، A_{α} محدب نیست، لذا $\bar{A}$ محدب نخواهد بود.



این عدد فازی می‌تواند بیانگر مفهوم فازی خیلی دور از ۱۰ باشد. مجموعه‌ی α -برش قسمت دوم محدب است. بنابراین $\bar{B}$ محدب است. سؤال سوم مشابه سؤال حل شده در مقاله‌ی قبل حل می‌شود. در مورد سؤال چهارم، به شکل زیر توجه کنید که $\mu_{\bar{A}}$ را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که $\bar{A}$ یک عدد فازی نه مثبت و نه منفی است. این عدد فازی توصیفی از تقریباً ۱ را ارائه می‌دهد.



پاورقی
1. Zimmermann

- منابع
۱. شوندی، حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. چاپ اول. ۱۳۸۵.
۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.
3. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, theory and applications, G. J. Klir and B. Yuan, Prentice Hall of India, 1995.

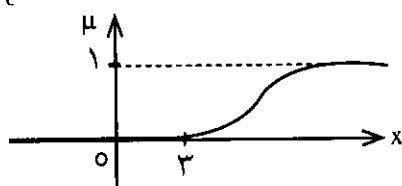
ولی پاسخ سؤال دوم منفی است. رابطه‌ی فوق صحیح نیست. علت اصلی برقرار نبودن این رابطه از تعریف تفریق دو بازه‌ی حقیقی ناشی می‌شود. در مثال فوق، مجموعه‌ی α -برش عدد فازی «تقریباً ۱-تقریباً ۳» عبارت است از قرینه‌ی مجموعه‌ی α -برش عدد فازی «تقریباً ۳-تقریباً ۱»؛ یعنی قرینه‌ی بازه‌ی $[4\alpha - 6, 2 - 4\alpha]$. بنابراین: $0 < \alpha \leq 1$ و $\alpha = [4\alpha - 2, 6 - 4\alpha]$ (تقریباً ۱-تقریباً ۳) حال این بازه با بازه‌ی $\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$ (تقریباً ۱) جمع می‌شود. بنابراین:

$0 < \alpha \leq 1$ و $\alpha = [6\alpha - 3, 9 - 6\alpha]$ (تقریباً ۱-تقریباً ۳) مجموعه‌ی α -برش حاصل با مجموعه‌ی α -برش عدد فازی تقریباً ۳، یعنی B_{α} متفاوت است.

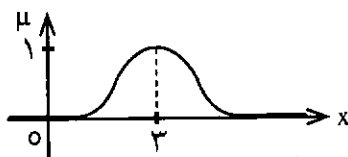
در انتها چگونگی حل تمرین‌هایی را که در مقاله‌ی قبل مطرح شدند، شرح می‌دهیم.

در سؤال اول، تابع عضویت قسمت الف می‌تواند به صورت $\mu_{\bar{A}}(x) = e^{-(x-3)^2}$ معرفی شود. قسمت ب معرف یک عدد فازی دوزنقه‌ای یا یک بازه‌ی فازی با هسته‌ی $[1, 3]$ است که می‌توانید آن را در رابطه‌ی کلی ارائه شده برای تابع عضویت این نوع از اعداد فازی جای گذاری کنید. تابع عضویت برای قسمت ج سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x-3}\right)^2} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$$



نمودار تابع عضویت $\bar{C}$



نمودار تابع عضویت $\bar{A}$

به منظور بررسی محدب بودن $\bar{A}$ در سؤال ۲، به این صورت عمل می‌کنم (در صورت سؤال، توان ۲ در مخرج کسر تایپ نشده است که در این حل اصلاح گردیده است):