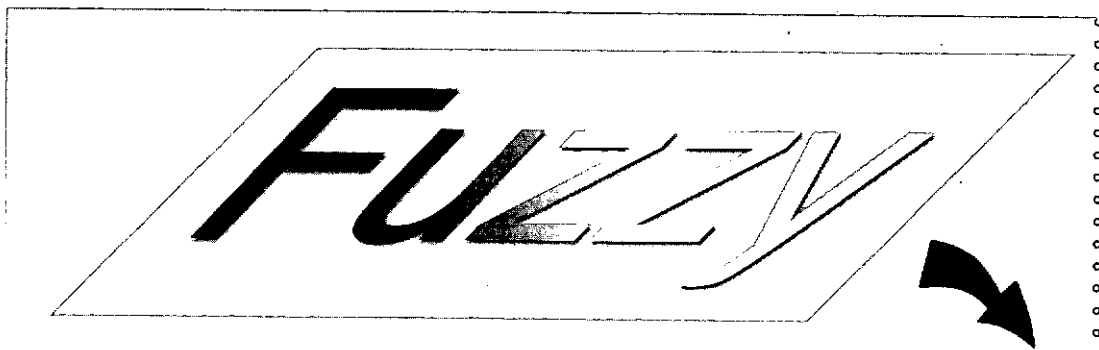


نظریه‌ی

مجموعه‌های فازی (۴)

● دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی



اشاره

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی مطرح شد، «نظریه‌ی مجموعه‌های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده در آمریکا ابداع شد. وی در «مجله‌ی اطلاعات و کنترل» که خود سردبیر آن بود، مقاله‌ی «مجموعه‌های فازی» خویش را چاپ کرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، حاصل توسعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی است و منطق فازی، حاصل توسعه‌ی منطق دوازده‌گانه است. فازی بودن نوعی ابهام و عدم قطعیت را بیان می‌کند و با مفهوم عدم اطمینان در علم احتمالات متفاوت است.

در مفاهیم فازی، دیدگاه شخصی افراد معیار سنجش است و هر مفهوم به سلیقه‌ی افراد وابستگی کامل دارد. مثلاً «جوان بودن» یک مفهوم فازی است، چرا که مثلاً یک فرد ۳۰ ساله ممکن است بین جمعی از افراد بالای ۶۰ سال جوان تلقی شود، ولی بین محصلین دوره‌ی ابتدایی جوان به حساب نیاید. هر مفهوم فازی، به موقعیتی که در آن به کار گرفته می‌شود، بستگی دارد و نظریه‌ی منطق و مجموعه‌های فازی، با دیدگاه ریاضی به بررسی این ابهامات می‌پردازد. در این قسمت به معرفی چند عمل و مفاهیم دیگر روی مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.



تعریف می‌شود:

$$\mu_{\bar{A} + \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x),$$

$$\mu_{\bar{A} \cdot \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x)$$

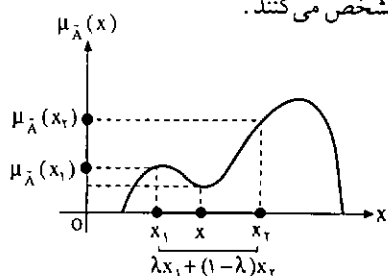
با توجه به تعریف، ضرب جبری توان m ام مجموعه‌ی فازی

تعریف: فرض کنیم $\bar{A}$ و $\bar{B}$ دو مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشند. در این صورت، جمع جبری و ضرب جبری این دو مجموعه، مجموعه‌های فازی به صورت $\bar{A} + \bar{B}$ و $\bar{A} \cdot \bar{B}$ هستند که توابع عضویت آنها برای هر $x \in X$ به این صورت:

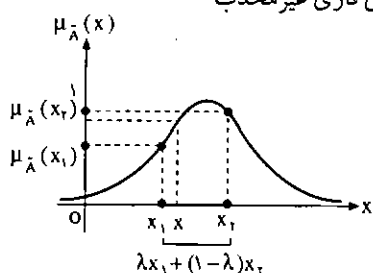
در ادامه به معرفی محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم.
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را محدب گوئیم، هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

اشکال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب و غیرمحدب را مشخص می‌کنند.



مجموعه‌ی فازی غیرمحدب



مجموعه‌ی فازی محدب

می‌دانیم، اگر $0 \leq \lambda \leq 1$ باشد، مقادیر $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ روی پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی x_1 و x_2 واقع هستند. بنابراین، در صورتی که $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی باشد، مقدار درجه‌ی عضویت هر عضو روی این پاره‌خط بزرگ‌تر یا مساوی حداقل مقدار درجه‌های عضویت در دو سر این پاره‌خط است. قضیه‌ی زیر یک شرط لازم و کافی برای محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب باشد آن است که مجموعه‌ی α -برش $\tilde{A}$ به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ محدب باشد. یعنی اگر x_1, x_2 دو عضو دل‌خواه A_α باشند، آن‌گاه $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ نیز برای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ در A_α باشد.

مثال: ثابت کنید، مجموعه‌ی فازی زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب است.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-x^2}$$

برای اثبات این موضوع می‌توانیم ثابت کنیم مجموعه‌ی α -برش $\tilde{A}$ محدب است. ابتدا A_α را می‌یابیم:

$$e^{-x^2} \geq \alpha \Rightarrow -x^2 \geq \ln \alpha \Rightarrow x^2 \leq -\ln \alpha$$

$\tilde{A}$ ، مجموعه‌ای فازی به صورت A^{-m} است که تابع عضویت آن به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

هم‌چنین، جمع کران‌دار و تفریق کران‌دار این دو مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌های فازی به صورت $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ هستند که توابع عضویت آن‌ها برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\},$$

$$\mu_{\tilde{A} - \tilde{B}}(x) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}$$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A} = \{(1, 0/3), (3, 1), (4, 0/7)\}$$

$$\tilde{B} = \{(1, 0/2), (4, 1), (5, 0/6)\}$$

در زیر مجموعه‌های فازی $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ ، $\tilde{A}^\complement$ ، $\tilde{A} - \tilde{B}$ ، $\tilde{A} + \tilde{B}$ ، و $\tilde{A} - \tilde{B}$ مشخص شده‌اند.

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \{(1, 0/44), (3, 1), (4, 1), (5, 0/6)\}$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(1) &= \mu_{\tilde{A}}(1) + \mu_{\tilde{B}}(1) - \mu_{\tilde{A}}(1) \cdot \mu_{\tilde{B}}(1) \\ &= 0/3 + 0/2 - 0/3 \times 0/2 = 0/44 \end{aligned}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(1, 0/06), (4, 0/7)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(3) = \mu_{\tilde{A}}(3) \cdot \mu_{\tilde{B}}(3) = 1 \times 0 = 0$$

چون مقدار تابع عضویت در $x = 3$ صفر شده، این عضو در مجموعه نیامده است.

$$\tilde{A}^\complement = \{(1, 0/09), (3, 1), (4, 0/49)\}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(1, 0/5), (3, 1), (4, 1), (5, 0/6)\}$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(4) &= \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(4) + \mu_{\tilde{B}}(4)\} \\ &= \min\{1, 0/7 + 1\} = 1 \end{aligned}$$

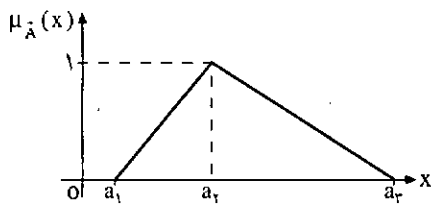
$$\tilde{A} - \tilde{B} = \{(4, 0/7)\}$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} - \tilde{B}}(1) &= \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(1) + \mu_{\tilde{B}}(1) - 1\} \\ &= \max\{0, 0/3 + 0/2 - 1\} = \max\{0, -0/5\} = 0 \end{aligned}$$

چون مقدار تابع عضویت در $x = 1$ صفر شده، این عضو در مجموعه منظور نشده است.

همان‌گونه که ملاحظه شد، اعمال ریاضی روی مجموعه‌های فازی به طور مستقیم از روی توابع عضویت آن‌ها تعریف می‌شود.



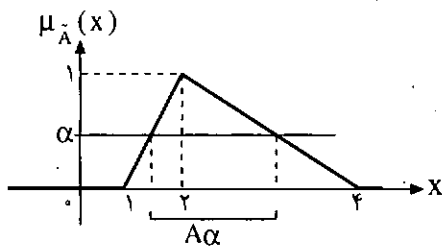
یک عدد فازی مثلثی

در این حالت، عدد فازی $\tilde{A}$ را به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش می‌دهیم. به نقطه‌ی a_2 که به ازای آن داریم: $\mu_{\tilde{A}}(a_2) = 1$ ، «میانه» می‌گوییم.

مثال: تابع عضویت عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$ و مجموعه‌ی α -برش این عدد فازی به صورت زیر هستند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 - \frac{x}{2} & 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\text{و } A_\alpha = [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$$



تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$

ملاحظه می‌کنیم که: $A_1 = \{2\}$ (مجموعه ۱-برش $\tilde{A}$) و $A_0 = [1, 4]$ (مجموعه ۰-برش $\tilde{A}$) در حالت کلی، مجموعه‌ی α -برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت زیر است:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

تعریف: عدد فازی $\tilde{A}$ را مثبت گوییم، هرگاه: $\forall x < 0, \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ و منفی گوییم، هرگاه: $\forall x > 0, \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

شکل صفحه بعد نمونه‌ای از یک عدد فازی مثبت و یک عدد فازی منفی را نمایش می‌دهد.

$$\Rightarrow -\sqrt{-\ln \alpha} \leq x \leq \sqrt{-\ln \alpha}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = [-\sqrt{-\ln \alpha}, \sqrt{-\ln \alpha}], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

توجه می‌کنیم که: $\ln \alpha \leq 0$. لذا زیر رادیکال مقداری نامنفی است. حال اگر داشته باشیم: $x_1, x_2 \in A_\alpha$ ، آن‌گاه:

$$-\sqrt{-\ln \alpha} \leq x_1 \leq \sqrt{-\ln \alpha} \xrightarrow{\times \lambda} -\lambda\sqrt{-\ln \alpha} \leq \lambda x_1 \leq \lambda\sqrt{-\ln \alpha}$$

$$-\sqrt{-\ln \alpha} \leq x_2 \leq \sqrt{-\ln \alpha}$$

$$\xrightarrow{\times (1-\lambda)} -(1-\lambda)\sqrt{-\ln \alpha} \leq (1-\lambda)x_2 \leq (1-\lambda)\sqrt{-\ln \alpha}$$

با جمع بستن طرفین این نامساوی‌ها داریم:

$$-\sqrt{-\ln \alpha} \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leq \sqrt{-\ln \alpha}$$

بنابراین: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ که $0 \leq \lambda \leq 1$. به این ترتیب A_α مجموعه‌ای محدب است و در نتیجه بنابر قضیه‌ی فوق، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی است.

با استفاده از مفهوم فوق، تعریف زیر را برای یک عدد فازی مطرح می‌کنیم:

تعریف: فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد.

در این صورت $\tilde{A}$ را یک عدد فازی گوییم، هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد.

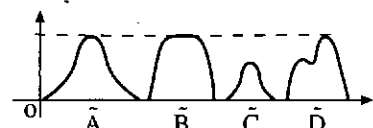
ب) تنها یک نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$$

ج) تابع $\mu_{\tilde{A}}$ به طور قطعی پیوسته باشد.

در شکل زیر فقط مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و یک عدد فازی است،

ولی مجموعه‌های فازی $\tilde{B}$ ، $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ اعداد فازی نیستند.



مقدار تابع عضویت $\tilde{B}$ در بیش از یک نقطه برابر با ۱ شده است.

مقدار تابع عضویت $\tilde{C}$ در هیچ نقطه‌ای برابر ۱ نشده است و $\tilde{D}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب نیست.

یکی از اعداد فازی مشهور، «عدد فازی مثلثی» است. تابع

عضویت این عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x < a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x < a_3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x-1})^2}$$

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$

۳. دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A} = \{(1, 0/2), (2, 0/4), (3, 0/7), (4, 0/1), (5, 0/8), (6, 0/5), (7, 0/3)\}$$

$$\tilde{B} = \{(2, 0/4), (3, 0/7), (4, 0/1), (5, 0/8), (6, 0/5), (7, 0/3)\}$$

مطلوب است محاسبه‌ی: $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$, $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$, $\tilde{A}^c$, $\tilde{A} + \tilde{B}$ و $\tilde{A} \times \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$.

۴. مجموعه‌ی α -برش عدد فازی مثلثی زیر را بیابید و مشخص کنید، این عدد فازی مثبت است یا منفی.

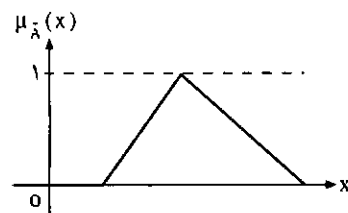
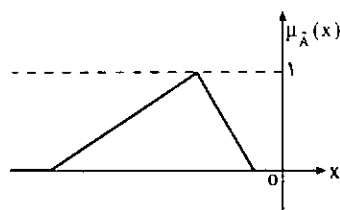
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & -2 < x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

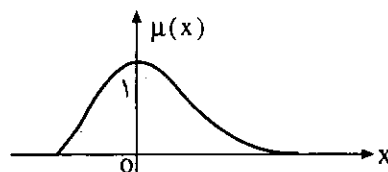
در قسمت بعدی، ضمن راهنمایی و حل این تمرین‌ها، خواننده را با مفاهیمی دیگر در مجموعه‌ها و منطق فازی آشنا می‌کنیم.

I. Zimmermann, H. J. Fuzzy Sets theory and its applications, kluwer academic publishers 1996.

۲. کازوتاناکا. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان و دکتر حامد رضا طارقیان. ۱۳۸۱.



برای مثال، عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$ در مثال بالا یک عدد فازی مثبت است. لازم به ذکر است که یک عدد فازی می‌تواند نه مثبت باشد و نه منفی. شکل زیر نمونه‌ای از یک عدد فازی است که نه مثبت است و نه منفی.



در ادامه چند تمرین برای خواننده مطرح کرده‌ایم که با توجه به آن‌چه شرح دادیم، می‌تواند به حل آن‌ها بپردازد.

۱. تابع عضویتی برای هریک از مجموعه‌های فازی زیر تعیین کنید:

الف) مجموعه‌ی فازی تقریباً ۳

ب) مجموعه‌ی فازی تقریباً بین ۱ و ۳

ج) مجموعه‌ی فازی خیلی بزرگ‌تر از ۳

۲. درباره‌ی محدب بودن هریک از مجموعه‌های فازی زیر تحقیق کنید:

جواب ۱:

$$D = \{(12, 8), (8, 12), (-8, -12), (-12, -8)\}$$

۲. مجموع پنج زاویه از زاویه‌های یک هشت ضلعی، 845° است. از سه زاویه‌ی باقی‌مانده، دو زاویه، متمم یکدیگر و دو زاویه، مکمل یکدیگرند. اندازه‌ی این سه زاویه را بیابید.

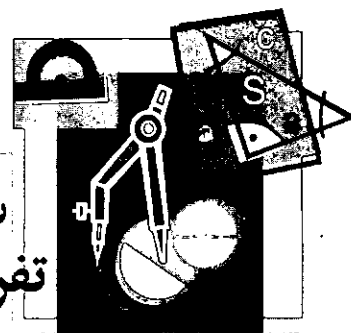
جواب: 35° , 55° و 145°

۳. همه‌ی مقادیر x را چنان بیابید که به ازای آن‌ها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z = [-x + 10 + (x+2)i](x-i)$$

جواب: ۵ و -۵

سوالات تفریح اندیشه



۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$$