

نظریهٔ گراف

Discrete Mathematics
Stephen A. Wiitala
Associate Professor of Mathematics
Norwich University

ترجمهٔ غلامرضا یاسی پور

۱. گرافها چیستند؟

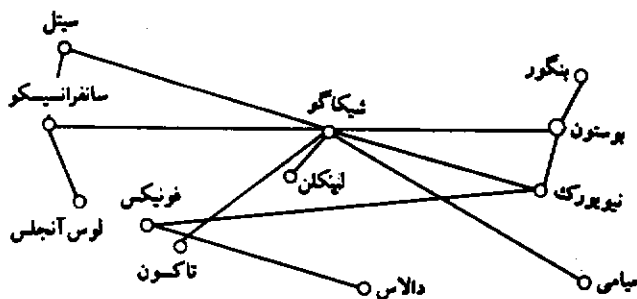
مفهوم گراف^۱ یکی از مفیدترین مفاهیم ریاضیات گسسته^۲ و یکی از جالب توجه ترین آنها از لحاظ ریاضی است. در واقع، تقریباً تمامی ما گرافها را گاه گاه ملاحظه کرده و به کار برده ایم. به عنوان مثال، شکل ۱، نقشهٔ مسیر خطوط هوایی X ، را در نظر می گیریم.

۴. اگر خطوط هوایی X تصمیم متوقف کردن تمام پروازهای از بوستون به نیویورک را بگیرد، باز هم می توان از بنگور به فونیکس رفت؟
۵. آیا می توان جمیع مسیرهای خط هوایی X را بدون دوبار گذشتن از یک مسیر طی کرد؟

مثال ۱.

طبیعی است که تعدادی سؤال در مورد نقشهٔ شکل ۱ مطرح شود.

در مورد نقشهٔ فوق بی اغراق می توان دهها سؤال دیگر مطرح کرد، و چنین برمی آید که اغلب آنها مشالهایی از انواع سؤالهایی هستند که ریاضیات در مورد گرافها مطرح می کند. پاسخ سؤالهای مشابه سؤالهای فوق را غالباً می توان در نظریهٔ عمومی گرافها^۳ یافت. مثال دیگری در نظر می گیریم.



شکل ۱. نقشهٔ خطوط هوایی

مثال ۲.

در این حالت شکل ۲ شبکه ای کامپیوتری^۴ را نمایش می دهد که در آن دایره ها، میکرو کامپیوترها^۵ را نمایش می دهند. مربها، میکرو کامپیوترهایی را نمایش می دهند که برای دادن علامت^۶ از یک مدار^۷ به مدار دیگر، نیز برای پردازش داده ها^۸ به کار می روند. لوزی، کامپیوتر مرکزی^۹ را در قلب شبکه مشخص می کند، و خطوط، مدارهای واصل شبکه را نمایش می دهند.

شخصی که مایل به دسترسی داشتن به شبکه است یکی از مینی کامپیوترها را از میکرو کامپیوتر خود می گیرد و از طریق خطوط در دسترس برای ارتباط یافتن با کامپیوتر مطلوب تغییر مسیر می دهد.

۱. آیا کسی می تواند از میامی به دالاس برود؟

۲. برای رفتن از بوستون به لوس آنجلس چند بار باید هواپیما عوض کنیم؟

۳. اگر کارمندان فرودگاه شیکاگو اعتصاب کنند و فرودگاه بسته شود باز هم رفتن از بوستون به لوس آنجلس امکان پذیر است؟

تجريد ریاضی^{۱۱} را به شخص نشان می دهد.

کشف این مطلب که یک نظریه واحد، اطلاعاتی در مورد کاربردهای این همه متفاوت به دست می دهد هیجان آور است. کلید به کار انداختن طرح کلی مورد نظر، توصیف به قدر کفایت محتاطانه دستگاه ریاضیمان به چنان طریقی است که آن را بر حسب نظریه قبلی قابل درک، و در عین حال در نواحی ای که مایل به استفاده از آن در آنها هستیم فایده مند کند. در مورد نظریه گراف، اصطلاحات^{۱۲} و نمادهای^{۱۳} نظریه مجموعه ها^{۱۴} به هدفمان کمک می کنند.

۲. مفاهیم اصلی و تعاریف

رأسها و یالها

مفهوم گراف مفهومی ساده است. در این مورد آنچه که نیاز به انجام دادن آن داریم تنظیم این مفهوم است که نقاطی^{۱۵} (موسوم به رؤوس^{۱۶}) داریم که به طور مستقیم توسط قطعه خطهایی^{۱۷} (موسوم به یالها^{۱۸}) به نقاط دیگر وصل شده اند. اغلب موضوعهای جالب توجه نظریه گراف شامل جریان ردیابی دنباله های یالها (موسوم به مسیرها^{۱۹}) ای یک گراف است. در این صورت اهمیت دارد که در تعاریفمان چنان دقیق باشیم که ابهامی که بتواند در بحث مربوط به این موضوع رخ دهد موجود نباشد. تعریفمان از گراف از همه لحاظ جامع^{۲۰} نیست، زیرا به بعضی از وضعیات ممکن مهم (چون یالهای یک راهه^{۲۱}، طوقه رأس^{۲۲}، یا بیش از یک واصل یک زوج رأس) نمی پردازد؛ اما شروع بررسی، مفاهیم اساسی گرافها را ممکن می سازد.

تعاریف

گراف زوج مرتب^{۲۳} (V, E) ای است که در آن V مجموعه ای موسوم به مجموعه رأسی^{۲۴} و E مجموعه ای شامل زیر مجموعه های با دو عضو V است. مجموعه E مجموعه یالی^{۲۵} نام دارد، و چنین می گویم که a و b توسط یک یال وصل شده اند اگر $\{a, b\}$ متعلق به E باشد.

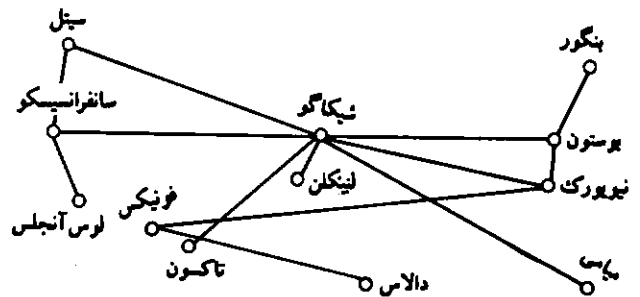
دستگاه می تواند برای فرستادن پیام بین میکرو کامپیوترها به کار رود، یا استفاده کننده می تواند برای انجام پردازش اطلاعاتی^{۱۰} به یکی از کامپیوترهای بزرگتر رجوع کند. در این مورد نیز به طور طبیعی بعضی سؤالا مطرح می شوند:

۱. آیا میکرو کامپیوتر واقع در سینتل می تواند پیامی به میکرو کامپیوتر واقع در میامی بفرستد؟

۲. چند تغییر مسیر برای گرفتن پیام فرستاده شده از بوستون به لوس آنجلس لازم است؟

۳. اگر مینی کامپیوتر واقع در شیکاگو خاموش شود، می توان باز هم پیامی از بوستون به لوس آنجلس فرستاد؟

۴. اگر مدارهای بین بوستون و نیویورک از کار بیفتند، می توان باز هم پیامی از بنگور به فونیکس فرستاد؟



شکل ۲. شبکه کامپیوتری

۵. آیا انتشار سلسله ای از علائم که به هر مدار واقع در شبکه دقیقاً یکبار برسد امکان پذیر است؟

واضح است که سؤالهای فوق تنها سؤالهایی که شخص می تواند در مورد تصاویر مذکور مطرح کند، یا شاید حتی مهمترینشان، نیست، اما آنها برد مفاهیم داخل در نظریه گراف را مطرح می کنند. جالب است که توجه داشته باشیم که می توان از شیء ریاضی یکسانی در بررسی کاربردهایی در میدانی به همان اندازه عدم ارتباط ظاهری حمل و نقل و ارتباطات استفاده کرد. این حقیقت که چنین کاربردهای متنوعی را می توان با استفاده از یک نظریه بررسی کرد جنبه های مفید

ریاضی^{۳۰} در ارتباط با G را به دست می دهد. توجه داشته باشید که بازسازی توصیف قبلی یک گراف از نمایش تصویری آن آسان است. در نتیجه، معمولاً جز در مواردی که سروکار داشتن با جنبه های فنی یا نظری^{۳۱} نظریه گراف مورد نیاز باشد، با نمایش تصویری گرافها کار می کنیم.

مسیرها

تعریف

مسیر دنباله ای از رؤوس یک گراف است که در آن هر زوج رأس متوالی^{۳۲} یالی از آن گراف باشد.

در گراف G مثال ۳، $abcd$ یک مسیر است، زیرا، $\{a,b\}$ ، $\{b,c\}$ ، و $\{c,d\}$ تماماً یالهای G اند. گفته می شود که یک مسیر سیری از اولین رأس فهرست شده به آخرین رأس فهرست شده است. نیز ممکن است که مسیر را به عنوان دنباله ای از یالها که در آن هر زوج یال متوالی^{۳۳} رأسی مشترک^{۳۴} دارند، تعریف کنیم. این تعریف جدید نیز کاملاً مفید است، و ما غالباً، هر جا که مناسب باشد، از یکی به دیگری می رویم. در این صورت مسیر $abcd$ ی موصوف در فوق، با توجه به این نظرگاه، به مسیر $\{c,d\}$ $\{b,c\}$ $\{a,b\}$ تبدیل می شود. تعاریف زیر بعضی از اصطلاحهای مهم تکمیلی مربوط به مسیرهای ارتباط دهنده رؤوس (یالها) را به دست می دهند.

تعاریف

مسیر ساده^{۳۵} سیری است که در آن هیچ یالی تکرار نشده است. مسیر مقدماتی^{۳۶} سیری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشده است. مدار^{۳۷} سیری است که از یک رأس آغاز و به همان رأس انجام می کند.

مدار ساده^{۳۸} سیری ساده است که مدار است.

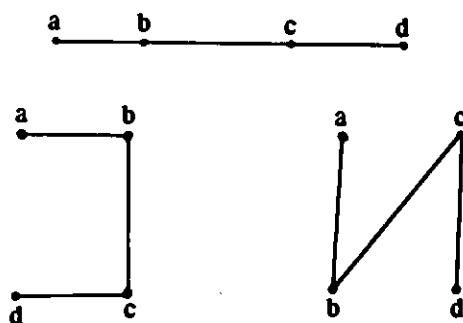
دور^{۳۹} مداری است که در آن رأس اولیه^{۴۰} دو بار رخ می دهد و هیچ رأس دیگری تکرار نمی شود.

گاهی به اعضای V ، بخصوص در کاربردهایی از نظریه گراف که رجوع به شبکه های ارتباطاتی^{۴۱} دارند، به عنوان گره ها^{۴۲} اشاره می کنیم.

در تصور گراف یا نمایش نموداری آن، مجموعه V را شامل نقاط یا رؤوس (مانند شهرها یا کامپیوترهای مثالهامان در بخش ۱) در نظر می گیریم، و سپس کمانهایی بین رؤوسی که با یالی به هم وصل شده اند، رسم می کنیم.

مثال ۳.

نمودار $G = (V,E)$ را، که در آن $V = \{a,b,c,d\}$ و $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$ ، در نظر می گیریم. این نمودار را می توان به هریک از سه طریق نشان داده شده در شکل ۳ نمایش داد.



شکل ۳.

باید توجه داشته باشیم که هر چند نمودارهای فوق متفاوت به نظر می رسند، تماماً دارای خواص یکسان اند؛ در واقع، اگر دو نمودار زیر را مستقیم کنیم، نتیجه کار در هر حال نمودار واقع در بالا خواهد بود. در هر نمودار می توان توسط سیری که از b به c می رود از a به d رفت؛ و اگر هر یک از قطعات موجود شکسته شود، دیگر رفتن از a به d ممکن نخواهد بود.

چنین می گویم که هریک از نمودارهای واقع در شکل ۳.۵ نمایش تصویری^{۴۸} G است، زیرا هریک نمایش بصری^{۴۹} خواص

اثبات:

آن را به عنوان تمرین وامی گذاریم.

قضیه ۲:

فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ و R چون در قضیه ۱ تعریف شده باشد. در این صورت G مرتبط است اگر و تنها اگر یک طبقه هم‌ارزی^{۵۰} مفرد در مورد نسبت R موجود باشد.

اثبات:

در اثبات گزاره‌ای به صورت $p \leftrightarrow q$ ، باید هم $p \rightarrow q$ هم $q \rightarrow p$ را اثبات کنیم. کار را با این فرض که G مرتبط است آغاز می‌کنیم.

در مورد هر زوج رأس متمایز a و b مسیری از a به b موجود، و به این ترتیب aRb راست است. از آنجا که به ازای جمیع مقادیر a ، aRa نیز صادق است، داریم: $\forall x \forall y (xRy)$ ، که به این معنی است که V تنها طبقه هم‌ارزی R است.

اگر تنها یک طبقه هم‌ارزی R موجود باشد و x و y رؤوسی متمایز باشند، نتیجه می‌شود که xRy ، زیرا x و y در طبقه هم‌ارزی یکسانی قرار دارند. از آنجا که x و y مساوی نیستند، باید مسیری از x به y موجود باشد. از آنجا که x و y دلخواه بودند، مسیر واصل هر دو رأس متمایز از G ای وجود دارد، و بنابراین G مرتبط است.

زیوگرافها

تعاریف

زیوگراف^{۵۱} (V, E) گراف (V', E') ی است که در آن V' زیر مجموعه‌ای^{۵۲} از V و E' شامل یالهایی واقع در E است که تنها رؤوس V' را به هم وصل می‌کنند. اگر S زیر مجموعه‌ای از V باشد، زیوگراف حاصل از S ،^{۵۳} گرافی با مجموعه رأسی S و مجموعه یالی شامل جمیع یالهایی از G است که رؤوس S را به هم وصل می‌کنند.

در این مرحله لازم است که به اخطار زیر توجه داشته باشیم. اصطلاحها و نمادهای نظریه گراف بسیار متنوع‌اند. عباراتی^{۴۱} که در این جا به کار برده‌ایم عباراتی هستند که در کتب دیگر ملاحظه‌شان کرده‌ایم، اما این عبارات به هیچ وجه استاندارد نیستند. زیرا به علت این که نظریه گراف زمینه ریاضی نسبتاً جدیدی است، اصطلاحهای آن، وقت کافی برای استاندارد شدن نداشته‌اند. عباراتی چون «ردپا^{۴۲}»، «خط سیر^{۴۳}»، «مسفر^{۴۴}» و غیره غالباً در کتب نظریه گراف و مقالات ریاضی^{۴۵} به چشم می‌خورند، معانی آنها می‌توانند منطبق بر معانی‌ای که برای عبارات دیگر داده‌ایم باشند (یا نباشند). به این ترتیب هنگام خواندن مطلبی در مورد نظریه گراف، برای اطمینان یافتن از درک معنی مورد نظر نویسنده از یک عبارت، نیازمند دقت بسیاریم. اصطلاحهای زیر استانداردترند.

تعاریف

یک نمودار مرتبط یا همبند^{۴۶} است اگر با معلوم بودن هر دو رأس متمایزی مسیری از یکی به دیگری موجود باشد. گرافی را که مرتبط نیست فامو تبط یا ناهمبند^{۴۷} می‌گویند.

در زبان روزمره گرافی را مرتبط می‌گوئیم که به صورت یک قطعه «به هم وصل» باشد. در حالت مربوط به نقشه خط سیر هوایی، کلمه مرتبط به این معنی است که هر دو شهر واقع در سیستم مزبور می‌توانند توسط دنباله‌ای از پروازهای تنها در ارتباط با آن خط هوایی، به هم وصل شوند. و در حالت مربوط به شبکه ارتباطاتی، کلمه مزبور به این مفهوم است که هر دو گروه واقع در سیستم می‌توانند با یکدیگر در ارتباط باشند. اگر گرافی نامرتبط باشد، در این صورت به «قطعاتی» تقسیم می‌شود که آنها را مؤلفه^{۴۸} می‌نامیم.

قضیه ۱:

فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد. نسبت R بر V را با xRy تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $x = y$ یا مسیری از x به y موجود باشد. R نسبتی هم‌ارزی^{۴۹} است.

اثبات:

اثبات قضیه ۲ بسیار شبیه اثبات نیمه دوم قضیه ۲ است. فرض می‌کنیم a و b رؤوس متمایزی در C باشند. در این صورت aRb ، و بنابراین مسیر $x_1b, x_2, \dots, x_nb$ از a به b موجود است. در واقع، به ازای جمیع i ها، aRx_i (چرا؟)، بنابراین هر x_i نیز در C هست. به این ترتیب مسیر مزبور مسیری از a به b واقع در C است.

تعریف

مؤلفه یک گراف زیرگرافی حاصل از طبقه هم ارزی نسبت R موصوف در قضیه ۱ است.

نتیجه: ۵۶

یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر تنها یک مؤلفه داشته باشد.

اثبات:

به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

نتیجه:

مؤلفه یک گراف زیرگرافی مرتبط است.

اثبات:

به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۲ و دو نتیجه‌اش نشان می‌دهند که تعریف مؤلفه، چنان که در فوق مطرح شده، واقعاً زیرگراف مرتبط ماکسیمال را به دستمان می‌دهد. این زیرگراف مرتبط گراف اصلی است که به آن نمی‌توان چیز بیشتری از گراف اصلی بدون نامرتب ساختن آن زیرگراف افزود.

اگر G گراف موصوف در مثال ۲ باشد. $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ گراف (V', E') که در آن $V' = \{a, b, c\}$ و $E' = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ زیرگرافی از G (و در واقع، زیرگراف فراهم شده توسط مجموعه $\{a, b, c\}$) است. به بیان ساده‌تر^{۵۴}، زیرگراف، گرافی است که دارای بعضی از رؤوس گراف اصلی و بعضی از یالهای گراف اصلی است. در این جا G' زیرگرافی از G است.



مؤلفه‌ها:

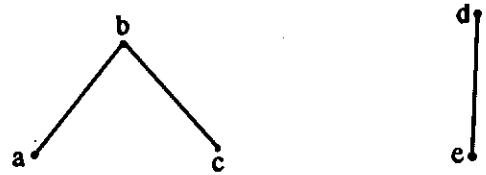
یکی از زمینه‌های جالب در بررسی یک گراف تعیین این مطلب، که چون آن گراف مرتبط نباشد چه اتفاقی رخ می‌دهد، است. مفهوم مؤلفه برای کمک به بحث در مورد این وضعیت مطرح شده و درک آن نسبتاً آسان است. مؤلفه به عنوان زیرگرافی از گراف اصلی، که مرتبط و تا حد امکان بزرگ باشد، در نظر گرفته می‌شود. در واقع، غالباً این تعریف به کار می‌رود که مؤلفه یک گراف، زیرگرافی مرتبط و ماکسیمال^{۵۵} است، و بسیار ممکن است که مایل باشیم مؤلفه یک گراف را برحسب این عبارات در نظر بگیریم. گرافی که مرتبط نیست به تعدادی مؤلفه تقسیم می‌شود. بحث زیر تعریف دیگری از مؤلفه را به دست می‌دهد، و به این علت جالب توجه است که موجب می‌شود به مفاهیم طبقات هم ارزی یک نسبت هم ارزی برگردیم.

قضیه ۳:

اگر C طبقه هم ارزی نسبت R موصوف در قضیه ۱ باشد، در این صورت زیرگراف حاصل از C ، مرتبط است.

مثال ۴:

گراف G رسم شده در زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:



زیرگراف حاصل از رؤوس a, b, c مؤلفه‌ای از G است. باید توجه داشته باشیم که این زیرگراف مرتبط است، اما جهد در افزودن چیز بیشتری از G به آن را نامرتب می‌کند. زیرگراف با رؤوس b و c نیز مؤلفه‌ای از G است. مؤلفه‌های مزبور «بزرگترین» قطعات مرتبط گراف مورد بحث هستند.

درجات رؤوس

تعاریف

یک رأس بر یک یال واقع^{۵۷} است اگر آن رأس عضوی از آن یال باشد. (از لحاظ تصویری، رأسی واقع بر یک یال است اگر یکی از دو سر آن یال باشد.)

درجه^{۵۸} یک رأس تعداد یالهایی است که آن رأس بر آنها واقع است. (در بعضی حالات مناسب است که مجاز کنیم گرافها طوقه، یا یالهایی به صورت $\{a, a\} = \{a\}$ داشته باشند. طوقه به صورت دوبار واقع بودن یالی بر رأس منفردش در نظر گرفته می‌شود زیرا این رأس به صورت هر دو سر آن به کار می‌رود. گرافهای ما معمولاً بدون طوقه‌اند.)

قضیه ۴:

در هر گراف، مجموع درجات رؤوس دو برابر تعداد یالهاست.

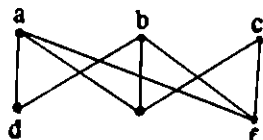
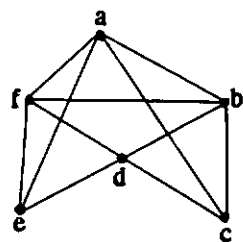
اثبات:

در این مورد تمام چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که، هنگام محاسبه مجموع درجات رؤوس، هر یال باید دوبار - به ازای هر سرش یکبار - به حساب آید. در واقع، آنچه هم‌اکنون مطرح کردیم احتمالاً کافی است، اما برای توضیح تکنیک اثباتی متعارف در نظریه گراف، این اثبات را صوری^{۵۹} تر می‌کنیم. برای انجام این کار با استفاده از استقرا عمل می‌کنیم. می‌انگاریم که $P(n)$ این گزاره که مجموع درجات رؤوس گراف n یال $2n$ است، باشد.

مرحله مبنایی^{۶۰}. اگر گرافی دارای یال نباشد، در این صورت درجه هر رأس صفر است و مجموع مورد نظر نیز صفر است، که دقیقاً گزاره $P(0)$ می‌باشد.

مرحله استقرایی^{۶۱}. فرض می‌کنیم $P(k)$ ، و نشان می‌دهیم که $P(k+1)$ از آن نتیجه می‌شود. برای انجام این کار، گراف G با $k+1$ یال را در نظر می‌گیریم، در این صورت نیاز به نشان دادن این داریم که درجات رؤوس آن $2k+2$ است. برای انجام این عمل، گراف G' را، که به استثنای این که یکی از یالهایی را که متعلق به G است ندارد، همان G است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یال مفقوده^{۶۲} $\{a, b\}$ باشد. مجموع درجات رؤوس G' ، بنا به این فرض که $P(k)$ صادق است (فرض استقرا^{۶۳})، زیرا G' دارای k یال است، برابر $2k$ می‌باشد. اما، برای ساختن G از G' ، تمام آنچه که لازم است برگرداندن یال $\{a, b\}$ به G' است. این کار درجه رأس a را به اندازه ۱ و درجه b را به اندازه ۱ واحد افزایش داده، به این ترتیب به مجموع درجات $2k+2$ واحد اضافه کرده مجموع درجات جمیع رؤوس را به $2k+2$ می‌رساند، و به این ترتیب مرحله استقرایی تکمیل می‌شود.

اثبات فوق گرچه طولانی است، اما تکنیک بسیار مفیدی را در مورد اثباتهای استقرایی^{۶۴} واقع در نظریه گراف، یعنی حذف چیزی برای برگشتن به فرض استقرا و بعد بازگرداندن آن برای به کار آمدن گزاره مورد نظر در حالت بالاتر بعدی، به دست می‌دهد. از آن جا که متغیر^{۶۵} n واقع در گزاره $P(n)$ تعداد یالهاست، اثباتی چون اثبات



فوق را گاهی استقرا بر تعداد یالها می‌نامند. تکنیکهای مشابهی در مورد استقرا بر تعداد رأسها به کار می‌روند. تعداد معتناهایی از قضایای مربوط به نظریهٔ گراف به این شیوه^{۶۶} اثبات می‌شوند. اکنون به بیان نتیجه‌ای از این قضیه که بعداً به کار می‌آید می‌پردازیم.

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رؤوسی که درجهٔ فرد^{۶۷} دارند عددی زوج^{۶۸} است.

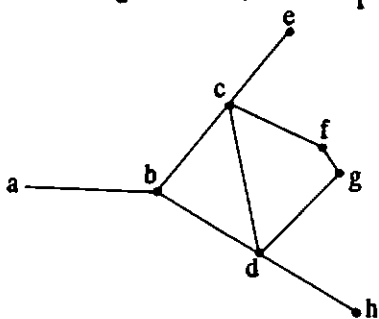
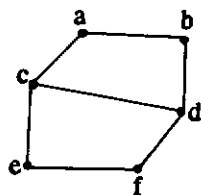
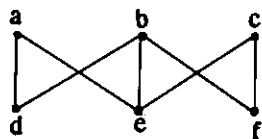
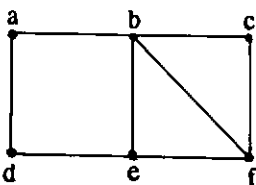
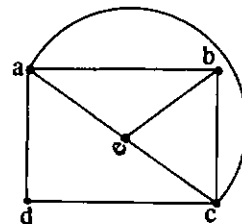
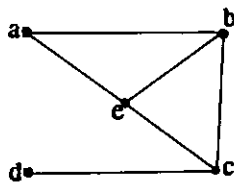
اثبات:

مجموع درجات رؤوس عددی زوج است، و برای این که چنین شود، تعداد جمله‌های فرد واقع در این مجموع نمی‌تواند عددی فرد باشد.

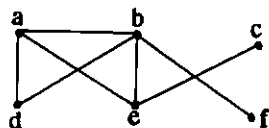
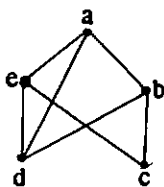
مجموعهٔ مسأله‌ای ۲:

کارهای زیر را در مورد گرافهای ارائه شده در مسائل ۱ تا ۴، انجام دهید:

- توصیفی صوری از گراف مربوطه (به صورت زوج مرتبی از مجموعه‌ها) بنویسید.
- درجهٔ هر رأس را بیابید.
- تعداد یالها را محاسبه کنید.
- قضیهٔ ۱ را تحقیق کنید.

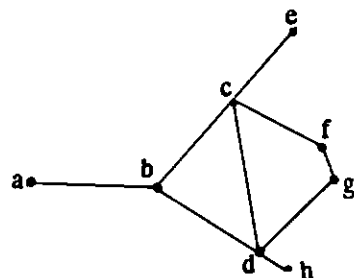
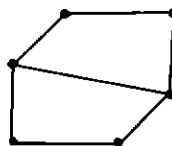


- کارهای زیر را در مورد هر گراف واقع در مسائل ۹ تا ۱۲ بیابید:
- مداری را بیابید که دور نباشد.
 - مداری را بیابید که ساده نباشد.
 - مداری ساده بیابید.



۲۱. نتیجه اول قضیه ۳ را اثبات کنید (یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر یک مؤلفه داشته باشد).

۲۲. نتیجه دوم قضیه ۳ را اثبات کنید (مؤلفه یک گراف زیرگرافی مرتبط است).



یادداشتها

1. Graph
2. Discrete Mathematics
3. General Theory of Graphs
4. Computer Network
5. Microcomputers
6. Signal
7. Circuit
8. Data
9. Mainframe Computer
10. Information Processing
11. Mathematical Abstraction
12. Terminology
13. Notation
14. Set Theory
15. Points
16. Vertices
17. Line Segments
18. Edges
19. Paths
20. Inclusive
21. One - Way Edges
22. Loop on a Vertex
23. Ordered Pair
24. Vertex Set
25. Edge Set
26. Communications Networks
27. Nodes
28. Pictorial Representation
29. Visual Representation

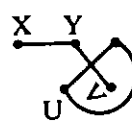
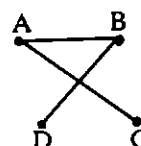
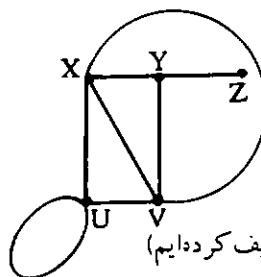
۱۳. با استفاده از گراف مسئله ۵، زیرگراف حاصل از مجموعه رئسی $\{a, b, c, f\}$ را بیابید.

۱۴. با استفاده از گراف مسئله ۸، زیرگراف حاصل از مجموعه رئسی $\{a, c, d, f\}$ را بیابید.

۱۵. با استفاده از گراف مسئله ۷، هر یک از زیرگرافهای حاصل از زیرمجموعه‌های مجموعه رئسی حاصل از حذف رئسی منفرد از مجموعه رئسی مزبور را بیابید.

۱۶. با استفاده از گراف مسئله ۶، دستورهای مسئله ۱۵ را تکرار کنید.

۱۷. اشکال زیر را در نظر می‌گیریم.



(الف) کدام شکل نمایش گراف (آن‌چنان که آن را تعریف کرده‌ایم) است؟

(ب) کدام یک نمایش گراف مرتبط است؟

(ج) در مورد گرافهایی که مرتبط نیستند، مؤلفه‌های آنها را مشخص کنید.

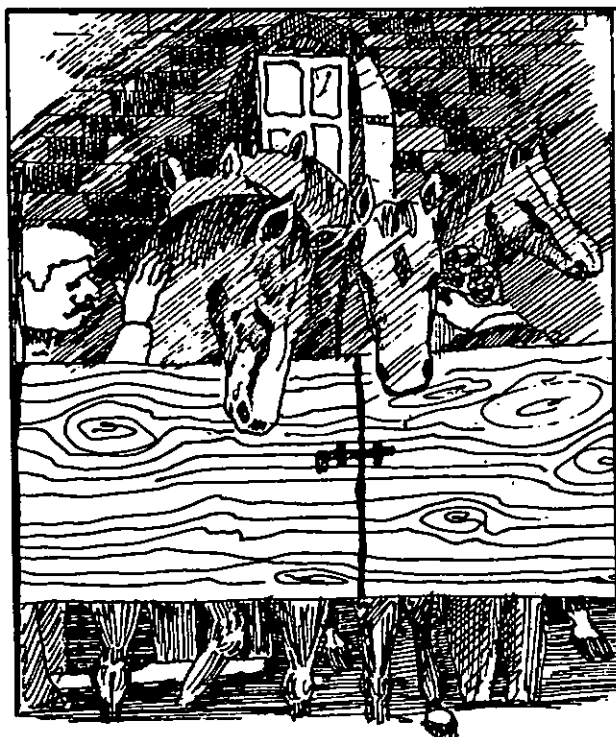
۱۸. ثابت کنید اگر مسیری از a تا b در گرافی موجود باشد، آنگاه مسیری مقدماتی از a تا b وجود دارد.

۱۹. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۲۰. گزاره واقع در اثبات قضیه ۳ را که بر این است که هر x_i ای مشمول در C می‌باشد، توجیه کنید.

30. Mathematical Properties
31. Technical or Theoretical Aspects
32. Successive Pair of Vertices
33. Successive Pair of Edges
34. Vertex in Common
35. Simple Path
36. Elementary Path
37. Circuit
38. Simple Circuit
39. Cycle
40. Initial Vertex
41. Terms
42. Trail
43. Route
44. Journey
45. Mathematical Papers
46. Connected
47. Disconnected
48. Components
49. Equivalence Relation

50. Equivalence Class
51. Subgraph
52. Subset
53. Induced by
54. Informally
55. Maximal Connected Subgraph
56. Corollary
57. Incident
58. Degree
59. Formal
60. Basic Step
61. Induction Step
62. Missing Edge
63. Induction Hypothesis
64. Induction Proofs
65. Variable
66. Manner
67. Odd
68. Even Number



فهرست الفبايشه ۲

در طویله‌ای چند نفر آدم با چند رأس اسب وجود دارند. آنها
مجموعاً ۲۲ سر و ۷۲ پا دارند. چند نفر آدم و چند نفر اسب در
آن جا هستند؟

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶