

نامعادله‌های متغیره و کاربردهای آن‌ها

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

● میرشهرام صدر

مجموعه‌ای جواب هریک از نامعادله‌های یک متغیره بالا، مجموعه‌ای شامل نقاط روی محور اعداد حقیقی است. در این مقاله با نامعادله‌هایی دو متغیره مانند:

$$x+y \leq 9, y^2 \leq 4x \text{ و } x^2 + y^2 < 25$$

آشنا می‌شویم و روش به دست آوردن مجموعه‌ی جواب این نامعادله‌ها را که قسمتی از صفحه‌ی مختصات است، بررسی می‌کنیم. صورت کلی هر نامعادله‌ی دو متغیره به یکی از شکل‌های $f(x,y) < 0$ و $f(x,y) > 0$ ، $f(x,y) \leq 0$ ، $f(x,y) \geq 0$ است و مجموعه جواب هریک از این نامعادله‌ها، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ (صفحه‌ی مختصات) است.

برای حل هریک از نامعادله‌های دو متغیره‌ی قبل، ابتدا نمودار $f(x,y) = 0$ را رسم و ملاحظه می‌کنیم که این نمودار صفحه مختصات را به چند ناحیه تقسیم می‌کند. برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از هر ناحیه را در نامعادله قرار دهیم. چنان‌چه نامعادله به یک نابرابری همیشه درست تبدیل شد، ناحیه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه جواب نامعادله را تشکیل می‌دهد.

تذکر: مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y) \geq 0$ یا $f(x,y) \leq 0$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y) = 0$ است، درحالی‌که

اشاره

با حل نامعادله‌های یک متغیره در سال‌های قبل آشنا شده‌اید؛ نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی اول مانند:

$$\frac{3}{2}x - 2 \leq \frac{4}{5} - \frac{2}{7}x \quad ; \quad 2x + 5 \geq 0$$

و نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی دوم مانند:

$$2x^2 + 3x - 5 > 0 \quad ; \quad (m-1)^2 \leq 2m(m-1)$$

کمی فراتر از نامعادله‌های بالا، می‌توان به نامعادله‌های یک متغیره شامل عبارات گویا، گنگ، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی^۱ اشاره کرد؛ مانند:

$$\frac{-x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} > 0 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}$$

$$v^{3x-1} \geq 9^{2-x}; \quad \log_x(x+1) \leq \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$$

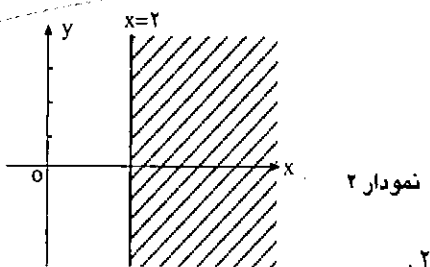
$$\sqrt{3} \tan x \geq 2 \sin x$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله $x = 2$ ، خطی است که در نقطه‌ای به طول ۲ عمود بر محور x هاست. اکنون مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2 \times 0 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $O(0,0)$ نیست، مجموعه‌ی جواب نامعادله است، هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x = 2$ است.

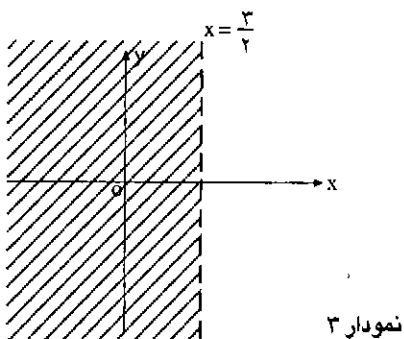


$$3x - 2 < x + 1 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

ابتدا خط به معادله $x = \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم و سپس مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0 < \frac{3}{2}$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. باید توجه داشته باشیم که مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x = \frac{3}{2}$ نیست.



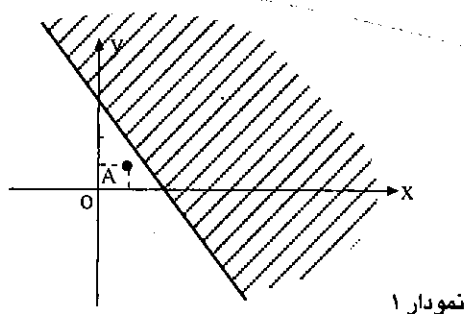
۳. ابتدا خط به معادله $3y - 9 = 0$ را رسم می‌کنیم:

$$3y - 9 = 0 \Rightarrow y = 3$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله $y = 3$ ، خطی است که در

مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y) < 0$ یا $f(x,y) > 0$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y) = 0$ نیست. برای مثال، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله $3x + 2y \geq 6$ ، ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $3x + 2y = 6$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این نمودار صفحه‌ی مختصات $(\mathbb{R}^2)$ را به سه ناحیه تقسیم می‌کند که عبارت‌اند از: ۱. مجموعه نقاط روی خط؛ ۲. مجموعه نقاط طرف راست خط؛ ۳. مجموعه نقاط طرف چپ خط.

$$3x + 2y = 6 \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 3 \end{array}$$



اکنون برای این‌که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از $\mathbb{R}^2$ مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$A(1,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3 \times 1 + 2 \times 1 \geq 6 \Rightarrow 5 \geq 6$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین با توجه به تذکری که گذشت، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $3x + 2y = 6$ است.

مثال: نمودار هریک از نامعادله‌ها را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

$$\begin{array}{ll} 3x - 2 < x + 1 & (2) \quad 2x - 4 \geq 0 & (1) \\ 5(y - 1) > 2y + 7 & (4) \quad 3y - 9 \leq 0 & (3) \\ -x - 2y \leq -4 & (6) \quad x - y \geq 0 & (5) \\ y^2 < 4x & (8) \quad x^2 + y^2 \geq 9 & (7) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 5x + 3y \geq 30 \\ 5y \geq x \\ 2y \leq x \end{cases} \quad (10) \quad (x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0 \quad (9)$$

حل:

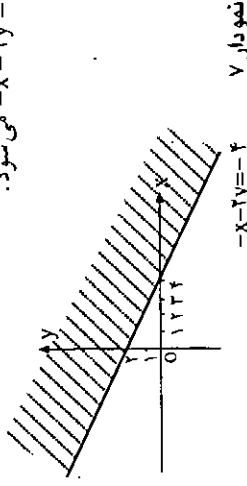
۱. ابتدا نمودار خط به معادله $2x - 4 = 0$ را رسم می‌کنیم:

۶.

$$-x - 2y = -4 \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 2 \end{array}$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل

نقطه O نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله $y = -x - 2y = -4$ می شود.



نمودار ۷

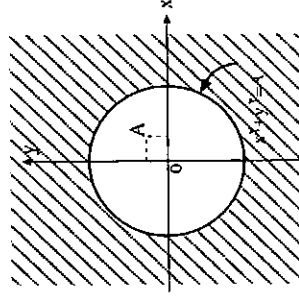
۷. ابتدا نمودار دایره $x^2 + y^2 = 9$ را رسم می کنیم. می دانیم

که این معادله، معادله یک دایره به مرکز $O(0,0)$ و شعاع $r = \sqrt{9} = 3$

است. سپس مشخصات یک نقطه $A(1,1)$ دل خواه مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می دهیم:

$$A(1,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 1^2 + 1^2 \geq 9$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین ناحیه ای که شامل نقطه $A(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی دایره به معادله $x^2 + y^2 = 9$ می شود.



نمودار ۸

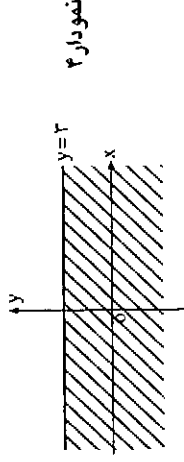
تذکر: به طور کلی مجموعه جواب نامعادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > R^2$ و شعاع R است و مجموعه جواب نامعادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < R^2$ مجموعه نقاط درون دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R است.

۸. ابتدا نمودار سهمی $y^2 = 4x$ را به کمک نقطه پایی رسم می کنیم:

نقطه ای به عرض ۳ عمود بر محور y ها است. اکنون مختصات یک نقطه $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3 \times 0 - 9 \leq 0 \Rightarrow -9 \leq 0$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه O را شامل می شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله $y = 3$ است.



نمودار ۴

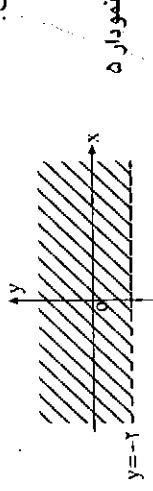
۴.

$$5(y-1) > 2y-11 \Rightarrow y > -2$$

ابتدا خط به معادله $y = -2$ را رسم می کنیم. سپس مختصات نقطه ای دل خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0 > -2$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه O را شامل می شود، مجموعه جواب نامعادله است، هم چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله $y = -2$ نیست.



نمودار ۵

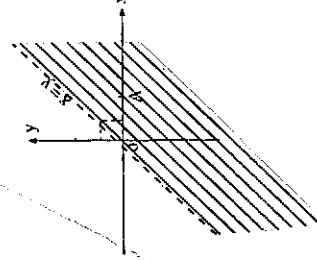
۵. ابتدا نمودار خط به معادله $x - y = 0$ را رسم می کنیم:

$$x - y = 0 \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 0 \end{array}$$

اکنون مختصات نقطه ای دل خواه مانند $A(2,0)$ را در نامعادله قرار می دهیم:

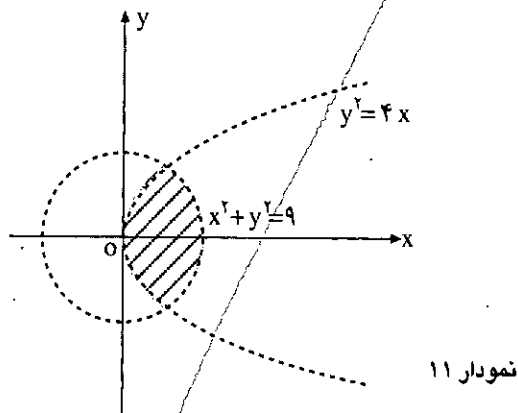
$$A(2,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2 - 0 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه $A(2,0)$ را شامل می شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله $x - y = 0$ است.

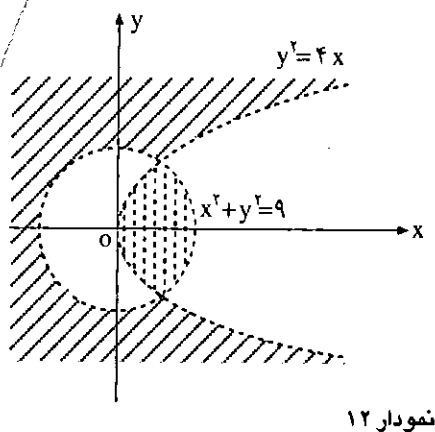


نمودار ۶

جواب نامعادله $x^2 + y^2 < 9$ ، مجموعه نقاط درون دایره به معادله $x^2 + y^2 = 9$ و مجموعه جواب نامعادله $y^2 < 4x$ ، مجموعه نقاط درون سهمی به معادله $y^2 = 4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله دستگاه (۲)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۲) مشخص شده است.



نمودار زیر که از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست آمده، مجموعه جواب نامعادله $(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0$ است.



$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 5x + 3y \geq 30 \\ 5y \geq x \\ 2y \leq x \end{cases} \quad ۱۰$$

برای حل این دستگاه، ابتدا خط‌ها به معادله‌های زیر را رسم می‌کنیم:

$$L_1: x + y = 9; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 9 \end{array}$$

$$L_2: 5x + 3y = 30; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 10 \end{array}$$

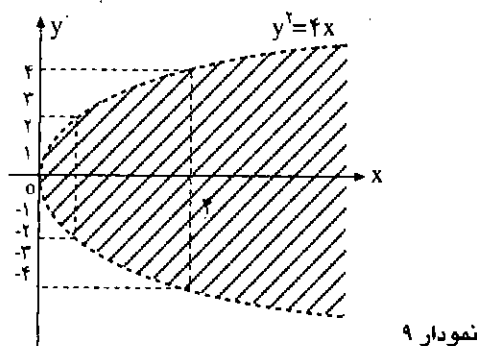
$$L_3: 5y = x; \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 0 \end{array}$$

$$y^2 = 4x \quad \begin{array}{c|cccc} x & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

اکنون مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $A(1, 0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$A(1, 0) \in \mathbb{R} \Rightarrow 0^2 < 4 \times 1 \Rightarrow 0 < 4$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی $A(1, 0)$ است، مجموعه جواب نامعادله محسوب می‌شود. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی سهمی به معادله $y^2 = 4x$ نیست.

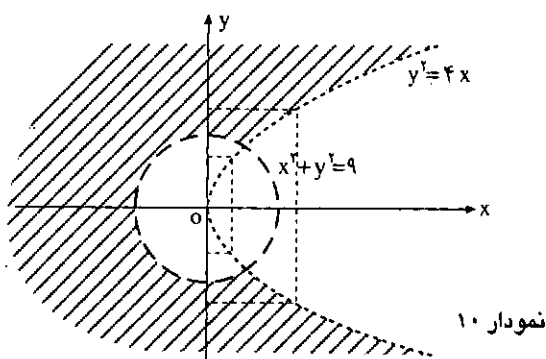


۹. برای حل نامعادله $(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0$ باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 > 0 \\ y^2 - 4x > 0 \end{cases} \quad (۱) \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 < 0 \\ y^2 - 4x < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

ابتدا مجموعه جواب دستگاه (۱) را به دست می‌آوریم:

مجموعه جواب نامعادله $x^2 + y^2 > 9$ ، مجموعه نقاط بیرون دایره به معادله $x^2 + y^2 = 9$ و مجموعه جواب نامعادله $y^2 > 4x$ ، مجموعه نقاط بیرون سهمی به معادله $y^2 = 4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله دستگاه (۱)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۱) مشخص شده است.



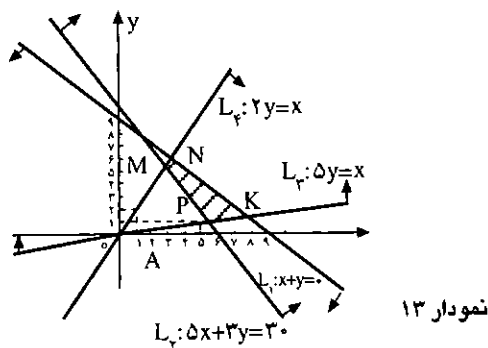
اکنون مجموعه جواب دستگاه (۲) را به دست می‌آوریم: مجموعه

$$L_f: 2y = x; \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

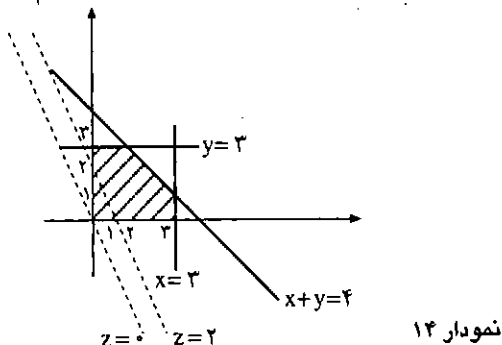
اکنون برای این که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل خواه از $\mathbb{R}^2$ ، مانند $A(2,0)$ را در نامعادله‌ها قرار می‌دهیم:

$$A(2,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} 2+0 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq 9 \\ 5 \times 2 + 3 \times 0 \geq 30 \Rightarrow 10 \geq 30 \\ 5 \times 0 \geq 2 \Rightarrow 0 \geq 2 \\ 2 \times 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \end{cases}$$

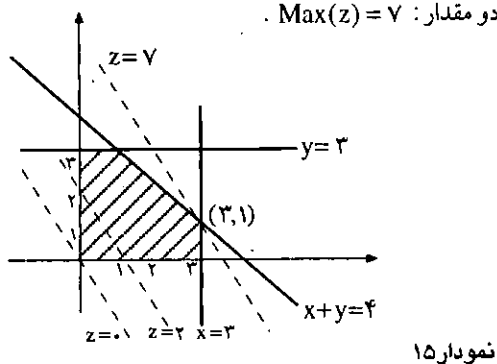
مجموعه جواب دستگاه بالا، چهارضلعی MNPK است.



بدیهی است که هدف، یافتن حداکثر مقدار z به ازای x و y هایی است که در تمام نامعادله‌ها صدق کنند. برای حل این مسئله روش‌های جبری نیز وجود دارند، ولی روش هندسی روشن‌تر و ساده‌تر است. به این منظور نمودار هندسی دستگاه نامعادله‌ها را رسم می‌کنیم. مختصات تمامی نقاط واقع در پنج ضلعی هاشور خورده و روی مرزهای آن در تمام نامعادله‌ها صدق می‌کنند. اما تابع دو متغیره‌ی z به لحاظ هندسی با تغییر z یک دسته خطوط را با شیب $m = -2$ مشخص می‌کند که دو تا از آن‌ها به ازای $z=0$ و $z=2$ رسم شده‌اند.



هرچه این دسته خطوط از مبدأ مختصات دور شوند، نقاط روی آن‌ها که در شرایط نامعادله‌ها صدق می‌کنند، مقدار بیشتری از z را به دست می‌دهند و لذا با انتقال این خطوط به دورترین نقاط محدوده‌ی فوق که بهترین شرایط را برای z ایجاد می‌کنند، مختصات مورد نظر را به دست می‌آوریم. باید دقت کرد که در این انتقال، خط حاصل از محدوده‌ی هاشور خورده نگذرد و بر محدوده‌ی فوق مماس شود که نقطه‌ی تماس (یکی از گوشه‌های محدوده‌ی مورد نظر است) جواب مطلوب محسوب می‌شود. مطابق شکل زیر، مختصات این نقطه که محل برخورد دو خط به معادله‌های $x=3$ و $x+y=4$ است، به صورت $(x,y) = (3,1)$ معلوم می‌شود و روشن است که به ازای این دو مقدار: $\text{Max}(z) = 7$.



مسئله‌ی ۲. ماکزیمی $z = x + 2y$ را که در شرایط دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کند، به دست آورید:

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+2y \geq 4 \\ 3x+y \geq 6 \\ y+x^2 < 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x \leq 3 \\ y \leq 3 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

ماکزیمی $z = f(x,y) = 2x + y$ را به ازای x و y هایی که در شرایط نامعادله‌های بالا صدق می‌کنند، به دست آورید.

کاربردهای نامعادله‌های دو متغیره

نامعادله‌های دو متغیره و تعیین مجموعه‌ی جواب آن‌ها به صورت هندسی، کاربردهای فراوانی در مباحث گوناگون دارد. از آن جمله در اقتصاد، مدیریت و برنامه‌ریزی، عمده‌ی این کاربردها حول بحث بهینه‌سازی سیستم‌ها با محدودیت است. «برنامه‌ریزی خطی» یا همان «بهینه‌سازی خطی»، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار مینی‌م (کمینه) یا ماکزیمی‌م (بیشینه) از یک تابع دو متغیره (تابع هدف) روی یک چند ضلعی محدب می‌پردازد. این چندضلعی‌های محدب، در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع معادله‌های خطی دو متغیره است. برای روشن‌تر شدن بحث به ذکر چند مسئله می‌پردازیم.

مسئله‌ی ۱. دو متغیره مثبت x و y در نابرابری‌های دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کنند:

۱۱) $3y - x \leq 6$ ۱۳) $y < \frac{x+1}{x-1}$
 ۱۲) $x^2 - 2y \geq 0$ ۱۴) $(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) < 0$
 نمودار مجموعه جواب هر یک از دستگاه‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $\begin{cases} x+y \geq 6 \\ x+y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x+y \leq 10 \\ 4 \leq y \leq 7 \\ 2 \leq x \leq 6 \\ y \leq 7-x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} 5x+4y \geq 20 \\ 4x+5y \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 9 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$

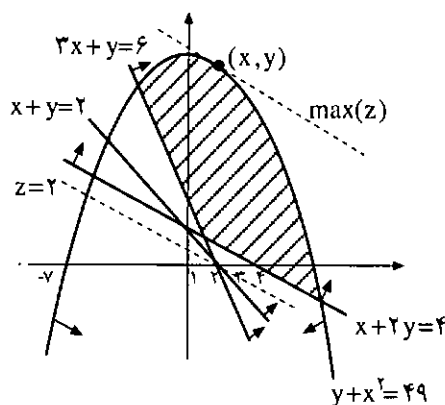
۵) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ x \geq y^2 \end{cases}$ ۶) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ y \geq x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

ماکزی مم یا مینی مم تابع هدف z را در هر یک از موارد زیر با شرایط داده شده به دست آورید:

۱) $\begin{cases} \text{Max}(z) = 2x + y \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 1 \\ y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} \text{Min}(z) = x + y \\ 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \text{Max}(z), \text{Min}(z) = 2x + 2y \\ x + y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} \text{Max}(z) = y - x^2 \\ x + y \geq 3 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

حل: ابتدا محدوده‌ی مورد نظر را به دست می‌آوریم. سپس یکی از خطوط مربوط به تابع هدف را، مثلاً به ازای $z = 2$ رسم می‌کنیم. آن گاه با انتقال موازی باید این خط را به دورترین نقطه‌ی محدوده فرستاد و بر محدوده‌ی فوق مماس کرد که در شکل این کار انجام شده است. اکنون کافی است مختصات نقطه‌ی تماس را به دست آوریم:



نمودار ۱۶

برای این کار باید مختصات نقطه‌ای را بر منحنی به معادله‌ی $y + x^2 = 49$ تعیین کرد که مماس بر منحنی در آن جا با خط به معادله‌ی $x + 2y = 2$ موازی باشد؛ یعنی شیب آن مساوی $-\frac{1}{2}$ باشد. می‌دانیم که مشتق تابع در هر نقطه، ضریب زاویه (شیب) مماس بر آن را به دست می‌دهد. پس مشتق تابع با ضابطه‌ی $y + x^2 = 49$ را می‌گیریم و مساوی $-\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$y = 49 - x^2; y' = -2x \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$$

$$y + \frac{1}{16} = 49 \quad y = 48\frac{15}{16}; \quad \text{Max}(z) = 98\frac{1}{8}$$

بدیهی است که برای مینی مم کردن تابع دو متغیره‌ی z به شیوه‌ی فوق با انتقال موازی باید دسته‌ی خطوط را حتی الامکان به مبدأ مختصات نزدیک‌تر کرد.

تمرین: نمودار هر یک از نامعادله‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $3(x-1) \geq -2x+4$ ۶) $y^2 - 2x < 0$
 ۲) $\frac{2x-3}{2} \leq 3x-2$ ۷) $y \geq 4x^2 + 8x + 1$
 ۳) $1 \leq 2y-3 \leq 5$ ۸) $|x+2y| \leq 8$
 ۴) $\frac{4-3y}{5} \geq 2$ ۹) $2x^2 + 2y^2 - 32 \leq 0$
 ۵) $-x+2y \geq 4$ ۱۰) $x^2 + y^2 - 2x - 2y \geq 2$



۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی حل نامعادله‌ها، به کتاب کوچک ریاضی نابرابرها و نامعادله‌ها از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

۱. معادلات و نامعادلات، ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی، انتشارات مبتکران.
 ۲. معادله و نامعادله، نوشته‌ی والدی و اسیوویچ و اوپلف و همکاران، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات مدرسه.