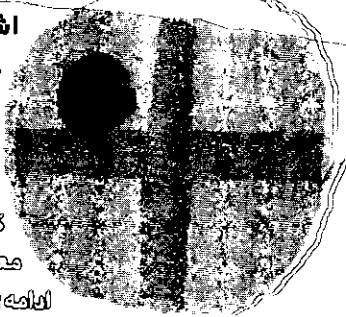


نامعادله های $\sqrt[n]{p(x)}$



اشاره: از زمان فیثاغورس

عددهای غیرگویا را اصم یا گنگ نامیدند. دلیل این نام گذاری آن بود که آن ها نمی توانستند مقدار دقیقی این عددها را مانند عددهای گویا مشخص کنند. در شماره ی قبیل درباره ی معادله های گنگ بحث کردیم. اینک در ادامه ی مطالب نامعادله های گنگ را در پی می آوریم.



نامعادله های گنگ را به صورت های کلی زیر تقسیم بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می کنیم.

۱. برای حل نامعادله ی $\sqrt[n]{p(x)} < q(x)$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $q(x)$ عبارت های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید دستگاه

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \\ p(x) < (q(x))^n \end{cases}$$

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2} \quad (2) \quad \sqrt{x-3} < -x^2 + x - 4 \quad (1)$$

حل:

۱. چون سمت راست نابرابری همواره منفی است، بنابراین طرف چپ نابرابری که مثبت است، نمی تواند از مقدار منفی کوچک تر باشد. در نتیجه، مجموعه جواب نامعادله تهی است.

$$\begin{cases} \Delta = -15 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}; \quad -x^2 + x - 4 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2} \Rightarrow \sqrt{3-x} < x-2 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ \sqrt{3-x} < x-2 \end{cases} \quad 2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 2 \\ 3-x < (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2, 3] \\ x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$$

۲. برای حل نامعادله ی $\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x)$ که

در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید

دستگاه زیر را حل کنیم:

حالت دوم: اگر $q(x) \geq 0$ ، در این صورت مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq 0 \\ p(x) > [q(x)]^{1/n} \end{cases} \quad (2)$$

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^2+3x+3} \leq 2x+1 \quad (2) \quad \sqrt{x+78} \leq x+6 \quad (1)$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $\sqrt[n]{p(x)} > q(x)$ از اجتماع مجموعه جواب های دو دستگاه (1) و (2) به دست می آید.

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^2+x-2} > x \quad (2) \quad \sqrt{x^2-4x} > x-3 \quad (1)$$

حل:

$$\sqrt{x^2-4x} > x-3 \quad (1)$$

حالت اول: اگر $x-3 < 0$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2-4x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = (-\infty, 0]$$

$$\sqrt{x+78} \leq x+6 \Rightarrow \begin{cases} x+78 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ \sqrt{x+78} \leq x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -78 \\ x \geq -6 \\ x+78 \leq x^2+12x+36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x \in (-\infty, -14] \cup [3, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [3, \infty)$$

$$\sqrt{x^2+3x+3} \leq 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x+3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x^2+3x+3 \leq (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{2}{3}, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [\frac{2}{3}, \infty)$$

3. برای حل نامعادله $\sqrt[n]{p(x)} > q(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) که

در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: اگر عبارت $q(x)$ منفی باشد، یعنی: $q(x) < 0$ ، در این صورت هر x که به ازای آن عبارت $\sqrt[n]{p(x)}$ با معنا باشد، جواب نامعادله است. یعنی در این حالت، مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$



حالت دوم: اگر $x - 3 \geq 0$ ، داریم:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x \geq 0 \\ x^2 - 4x > (x - 3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) \\ x > \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow D_2 = (\frac{9}{2}, \infty)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, 0] \cup (\frac{9}{2}, \infty)$$

$$\sqrt{x^2 + x - 2} > x \quad 2.$$

حالت اول: اگر $x < 0$ ، داریم:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = (-\infty, -2]$$

حالت دوم: اگر $x \geq 0$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, \infty) \\ x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \\ x \in (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_2 = (2, \infty)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, -2] \cup (2, \infty)$$



□ ۴. برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌ی

$\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x)$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های

جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع

مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$(1) \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq [q(x)]^{2n} \end{cases}$$

تذکر: در صورتی که در حالت خاص $q(x)$ همواره مثبت یا منفی باشد، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌های حالت‌های ۳ یا ۴ کافی است، یکی از دو دستگاه (۱) یا (۲) را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x+4} > -x^2 - 1 \quad (2) \quad \sqrt{x^2 - 2x} \geq 4 - x \quad (1)$$

حل:

$$\sqrt{x^2 - 2x} \geq 4 - x \quad 1.$$

حالت اول: اگر $4 - x < 0$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4 - x < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (4, \infty) \\ x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = (4, \infty)$$

حالت دوم: اگر $4 - x \geq 0$ ، داریم:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x \geq (4 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 4] \\ x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ x \in [\frac{4}{3}, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_2 = [\frac{4}{3}, 4]$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = [\frac{4}{3}, \infty)$$

$$\sqrt{x+4} > -x^2 - 1 \quad 2.$$

چون در این نامعادله همواره به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، داریم $-x^2 - 1 < 0$ ، بنابراین کافی است فقط دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -x^2 - 1 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in [-4, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [-4, \infty)$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی
 $(n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{p(x)} \leq \sqrt[n]{q(x)}$ ، کافی است مجموعه جواب

$$\text{دستگاه } \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) \leq q(x) \end{cases} \text{ را به دست آوریم.}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+1} \quad (2) \quad \sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x} \quad (1)$$

حل:

۱.

$$\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 4-x^2 < 4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-2, 0) \cup (1, 2]$$

۲.

$$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \leq x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1, \infty) \\ x \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [1, \infty)$$

۷. برای حل نامعادله‌ی $(n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{p(x)} > \sqrt[n]{q(x)}$ ،

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} > \sqrt[n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است،

مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی
 $(n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{p(x)} \leq \sqrt[n]{q(x)}$ ، کافی است مجموعه جواب

$$\text{دستگاه } \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \leq q(x) \end{cases} \text{ را به دست آوریم.}$$

مثال: نامعادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2}$$

۵. برای حل نامعادله‌های: $(n \in \mathbb{N})$

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x), \sqrt[n]{p(x)} > q(x)$$

$$\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x), \sqrt[n]{p(x)} \geq q(x)$$

$$\sqrt[n]{p(x)} < \sqrt[n]{q(x)}, \sqrt[n]{p(x)} > \sqrt[n]{q(x)}$$

$$\sqrt[n]{p(x)} \leq \sqrt[n]{q(x)} \text{ و } \sqrt[n]{p(x)} \geq \sqrt[n]{q(x)}$$

که در آن‌ها، $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا بر حسب x هستند، برای مثال $\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x)$ ، کافی است دو طرف نامعادله را به توان $2n+1$ برسانیم، یعنی $p(x) \leq [q(x)]^{2n+1}$. سپس مجموعه جواب‌های نامعادله را به دست می‌آوریم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt[5]{x^2+1} \geq \sqrt[5]{3-x^2} \quad (2) \quad \sqrt{x+2} \leq -5 \quad (1)$$

حل:

۱.

$$\sqrt{x+2} \leq -5 \Rightarrow x+2 \leq -125 \Rightarrow x \leq -127$$

$$\Rightarrow D = (-\infty, -127]$$

۲.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^2+1} &\geq \sqrt[5]{3-x^2} \Rightarrow x^2+1 \geq 3-x^2 \\ \Rightarrow (x^2-1) + (x^2-1) &\geq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2) \geq 0 \\ \Rightarrow D &= [1, \infty) \end{aligned}$$

۶. برای حل نامعادله‌ی $(n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{p(x)} < \sqrt[n]{q(x)}$ ،

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} < \sqrt[n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است،

مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$ را به دست

آوریم.

حل:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 15-x \geq 0 \\ 15-x \geq (3-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 15 \\ x^2 - 5x - 6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3] \\ x \in (-\infty, 15] \\ x \in [-1, 6] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = [-1, 3]$$

مجموعه جواب دستگاه (ب) تهی است. بنابراین

$$D_2 = \emptyset \text{ در نتیجه:}$$

$$D = D_1 \cup D_2 = [-1, 3]$$

۲.

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{52-x^2} \leq 2-x \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ \sqrt{52-x^2} \geq 2-x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

برای حل دستگاه (الف) داریم:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 52-x^2 \geq 0 \\ 52-x^2 \leq (2-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2\sqrt{13} \leq x \leq 2\sqrt{13} \\ 2x^2 - 4x - 48 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 2] \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \Rightarrow D_1 = [-2\sqrt{13}, -4] \\ x \in (-\infty, -4] \cup [6, \infty) \end{cases}$$

دستگاه (ب) را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ 52-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2\sqrt{13} \leq x \leq 2\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (2, \infty) \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \Rightarrow D_2 = (2, 2\sqrt{13}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = [-2\sqrt{13}, -4] \cup (2, 2\sqrt{13}]$$

۹. برای حل نامعادله‌های گنگ که صورت کلی آن‌ها به غیر از هشت حالت قبل باشند، ابتدا دامنه‌ی تعریف نامعادله را به دست می‌آوریم. برای این منظور کافی است، دستگاه نامعادله‌هایی را حل کنیم که در آن عبارت زیر هر رادیکال با فرجه‌ی زوج را نامنفی قرار دهیم و در صورتی که رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت

$$\sqrt[n]{x+2} > \sqrt[n]{8-x^2} \Rightarrow \begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [2, 2\sqrt{2}]$$

۸. برای حل نامعادله‌های

$$\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} > f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \leq f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \geq f(x)$$

و $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} < f(x)$ ($1 < n \in \mathbb{N}$)، که در آن‌ها $p(x)$ ، $q(x)$ و

$f(x)$ چند جمله‌ای‌های بر حسب متغیر x هستند، برای مثال

ابتدا مجموعه جواب دستگاه‌های زیر را

به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} q(x) \geq 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \leq f(x).q(x) \end{cases} \quad (1); \begin{cases} q(x) < 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \geq f(x).q(x) \end{cases} \quad (2)$$

سپس مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \leq f(x)$ از

اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست می‌آید.

مثال. مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید:

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \leq 1 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \geq 1 \quad (1)$$

حل:

$$\frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{15-x} \geq 3-x \end{cases} \quad (\text{الف}) \quad ۱.$$

$$\begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt{15-x} \leq 3-x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

برای حل دستگاه (الف)، داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty) \\ 3x+2 \geq 0 \\ \frac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty) = A \\ 3x-2 \leq \sqrt{5x^2-1} \end{cases}$$

چون عبارت سمت راست این نابرابری به ازای هر $x \in A$ مثبت است، بنابراین برای به دست آوردن مجموعه جواب این دستگاه کافی است، اجتماع مجموعه جواب های دو دستگاه زیر را بیابیم:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} x \in A \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{3}) \\ \text{ب)} \quad & \begin{cases} x \in A \\ 3x-2 \geq 0 \\ (3x-2)^2 \leq 5x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\frac{2}{3}, \infty) \\ x \in [\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5}{2}] \end{cases} \Rightarrow D_2 = [\frac{2}{3}, \frac{5}{2}] \\ & D' = D_1 \cup D_2 = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5}{2}] \end{aligned}$$

حالت دوم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty) \\ 3x+2 < 0 \\ \frac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \\ 3x-2 \geq \sqrt{5x^2-1} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \\ 3x-2 > 0 \\ (3x-2)^2 \geq 5x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ 4x^2-12x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D'' = \emptyset \\ & \Rightarrow D = D' \cup D'' \Rightarrow D = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5}{2}] \end{aligned}$$

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} \geq \sqrt{4-\sqrt{1-x}} \geq \sqrt{2-x} \quad 3$$

زیر رادیکال را مثبت قرار دهیم، سپس نامعادله را حل کنیم.

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3 \quad (1)$$

$$\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x+2 \quad (2)$$

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{x-3} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}} \quad (4)$$

حل:

$$1. \quad \sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$$

(دامنه ی تعریف نامعادله):

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x^2+7x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-5, 5] \\ x \in (-\infty, -7] \cup [0, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = [0, 5]$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \in [0, 5] \\ (\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x})^2 > 9 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 5] \\ 25-x^2 + 2\sqrt{25-x^2} \cdot \sqrt{x^2+7x} + x^2+7x > 9 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 5] \\ 2\sqrt{(25-x^2)(x^2+7x)} > -7x-16 \end{cases} \end{aligned}$$

چون نامعادله ی آخر، به ازای $x \in [0, 5]$ همواره به یک نابرابری درست تبدیل می شود، یعنی عبارت سمت راست نامعادله به ازای $x \in [0, 5]$ همواره منفی و عبارت سمت چپ نامعادله به ازای $x \in [0, 5]$ همواره نامنفی است، در نتیجه $D = [0, 5]$

2.

$$\begin{aligned} & \frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x+2 \Rightarrow \frac{(3x-2)(3x+2)}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x+2 \\ & 5x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{1}{5} \Rightarrow D_1 = (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty) \end{aligned}$$

برای حل نامعادله ی بالا، دو حالت ذیل را در نظر می گیریم:

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 4-\sqrt{1-x} \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} \leq 4 \Rightarrow D_1 = [-15, 1] \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in [-15, 1] \\ \sqrt{4-\sqrt{1-x}} \geq \sqrt{2-x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \in [-15, 1] \\ \sqrt{1-x} \leq x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-15, 1] \\ x+2 \geq 0 \\ (1-x) \leq (x+2)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in [-2, 1] \\ x^2+5x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D = \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1 \right] \end{aligned}$$

۴

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-16} + |x-3|}{\sqrt{x-3}} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases} x^2-16 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty) \\ x \in (3, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = [4, \infty)$$

چون به ازای هر $x \in [4, \infty)$ عبارت‌های $|x-3|$ و $\sqrt{x-3}$ مثبت هستند، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} x \in [4, \infty) \\ \sqrt{x^2-16} + x - 3 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [4, \infty) \\ \sqrt{x^2-16} > 8-x \end{cases}$$

برای به دست آوردن مجموعه جواب‌های این دستگاه، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (الف) و (ب) را بیابیم :

$$(الف) \quad \begin{cases} x \in [4, \infty) \\ 8-x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [8, \infty);$$

$$(ب) \quad \begin{cases} x \in [4, \infty) \\ 8-x \geq 0 \\ x^2-16 > (8-x)^2 \end{cases} \Rightarrow D_b = [5, 8)$$

$$\Rightarrow D = D_f \cup D_b \Rightarrow D = (5, \infty)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^2+x} > 1-2x \quad (۲) \quad 4-x \leq \sqrt{x^2-2x} \quad (۱)$$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0 \quad (۴) \quad \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1 \quad (۳)$$

$$\sqrt{24-10x} \geq 3-4x \quad (۶) \quad \sqrt{x+1} > \sqrt{3-x} \quad (۵)$$

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \quad (۸) \quad x > \sqrt{1-x} \quad (۷)$$

$$\sqrt{24-5x} \leq x \quad (۱۰) \quad \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (۹)$$

$$\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \quad (۱۱)$$

$$\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3} \quad (۱۳) \quad \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4 \quad (۱۲)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x-2 \quad (۱۴)$$

$$\sqrt{x+1} + 1 < 4x^2 + \sqrt{3x} \quad (۱۵)$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} > 3 \quad (۱۷) \quad \frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} \quad (۱۶)$$

$$\sqrt{10-\sqrt{28-x}} < 3 \quad (۱۹) \quad 5\sqrt{x-1} < 2\sqrt{(x-1)^2} \quad (۱۸)$$

$$2(x + \sqrt{x^2+4x+3}) < 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} - 2) \quad (۲۰)$$