

نابرابریها

(قسمت سوم)

• میرشهرام صدر

در شماره قبل، تصادی از قضیه های نابرابریها بررسی کردیم، اکنون در ادامه مقاله قبل، قضیه ها و نتیجه های مهم دیگری از نابرابریها بیان میکنیم.

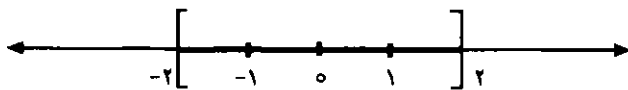
قضیه ۱۰. فرض کنیم $a > 0$ ؛ $x < -a$ یا $x > a \Leftrightarrow x^2 > a^2$.
اثبات به عهده خواننده می باشد.

مثال. نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید:

$$1) x^2 \leq 4 \quad 2) x^2 > 3$$

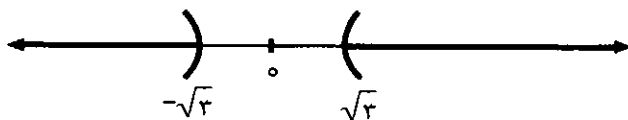
حل.

$$-1 \quad x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 2^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$



$$[-2, 2]$$

$$-2 \quad x^2 > 3 \Rightarrow x^2 > (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3}$$



$$(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

مسئله ۱. اگر x یک عدد حقیقی باشد، نشان دهید

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

حل. مسئله را در دو حالت بررسی می کنیم:

حالت اول: اگر $x \geq 0$ ، آن گاه طبق تعریف قدر مطلق $|x| = x$ و

در این حالت $x < |x|$ بنابراین $-|x| \leq x \leq |x|$.

حالت دوم: اگر $x < 0$ ، آن گاه طبق تعریف قدر مطلق

$|x| = -x$ یا $x = -|x|$ و در این حالت $x < |x|$ بنابراین

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

قضیه ۱۱. فرض کنیم $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، در این

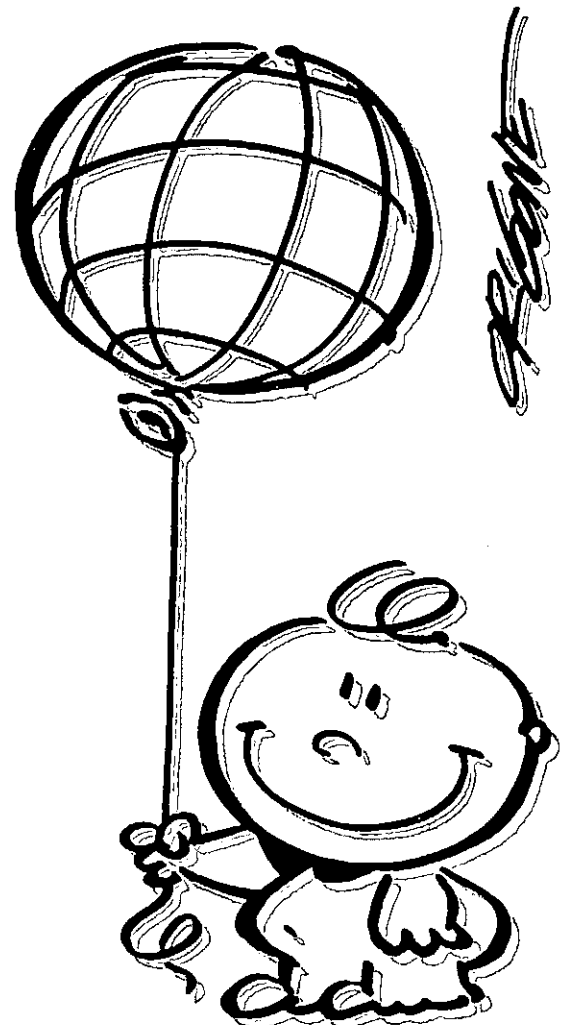
صورت داریم: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

برهان. فرض کنیم $-a \leq x \leq a$ دو حالت زیر را در نظر

می گیریم:

حالت اول: اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $|x| = x$ ؛ با جایگزینی این رابطه

در فرض داریم:



$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

قضیه ۱۲. (نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن گاه $|x+y| \leq |x|+|y|$.

برهان. برای عددهای حقیقی x و y داریم:

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

نتیجه ۷. (تعمیم نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، اعداد حقیقی باشند، آن گاه $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ اثبات این حکم به استقرا روی n است:



$$-a \leq |x| \leq a \Rightarrow |x| \leq a$$

حالت دوم: اگر $x < 0$ ، آن گاه $x = -|x|$ ؛ با جایگزینی این رابطه در فرض داریم:

$$-a \leq -|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x| \Rightarrow |x| \leq a$$

بعکس، فرض کنیم $|x| \leq a$ ، طبق مسأله قبل، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$\begin{cases} |x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x| \\ -|x| \leq x \leq |x| \end{cases} \Rightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$$

$$\Rightarrow -a \leq x \leq a$$

مثال. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$2|a+b+c| \leq |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

حل.

چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $-|x| \leq x \leq |x|$ (مسأله ۱)، بنابراین:

$$-|a+b| \leq a+b \leq |a+b|$$

$$-|a+c| \leq a+c \leq |a+c|$$

$$-|b+c| \leq b+c \leq |b+c|$$

$$-(|a+b| + |a+c| + |b+c|) \leq 2(a+b+c)$$

$$\leq |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

با توجه به قضیه ۱۰ خواهیم داشت:

$$2|a+b+c| \leq |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

نتیجه ۵. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند:

$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

نتیجه ۶. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند.

مثال. ماکزیم و مینیم عبارتهای زیر را پیدا کنید :

$$۱) A = |x - ۳| - |x + ۱|$$

$$۲) B = |x + ۵| - |x + ۲|$$

حل.

(۱) با توجه به مسأله (۳) داریم :

$$|A| = ||x - ۳| - |x + ۱|| = ||۳ - x| - |x + ۱||$$

$$\leq |۳ - x + x + ۱| = ۴$$

$$\Rightarrow |A| \leq ۴ \Rightarrow -۴ \leq A \leq ۴$$

(۲) با توجه به مسأله (۲) داریم :

$$|B| = ||x + ۵| - |x + ۲|| \leq |x + ۵ - x - ۲| = ۳ \Rightarrow |B| \leq ۳$$

$$\Rightarrow -۳ \leq B \leq ۳$$

مثال. برای سه عدد حقیقی x ، y و z ثابت کنید :

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

حل. با توجه به نابرابری مثلث داریم :

$$|x - z| + |z - y| \geq |x - z + z - y| = |x - y|$$

$$\Rightarrow |x - z| + |z - y| \geq |x - y|$$

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

قضیه ۱۳. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند و $a > 0$ ،

در این صورت یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد ؛ به طوری که $an > b$. (این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.)

مثال. فرض کنیم $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید

یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری که $\frac{1}{n} < a$.

حل. با توجه به قضیه قبل، چون ۱ و a دو عدد حقیقی هستند

و $a > 0$ ، بنابراین یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد ؛ به گونه ای

که $an > ۱$ ، در نتیجه $a > \frac{1}{n}$.

مثال. ثابت کنید معادله $x^2 + ۱ = 0$ در مجموعه عددهای

حقیقی جواب ندارد.

حل. واضح است که $x = 0$ در معادله صدق نمی کند ؛ زیرا

$$n = ۲: |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad (\text{نابرابری مثلثی})$$

$$n = k: |x_1 + x_2 + \dots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$$

(فرض استقرا)

$$n = k + ۱: |x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}|$$

$$\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}| \quad (\text{حکم استقرا})$$

با توجه به نابرابری مثلثی داریم :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_k| + |x_{k+1}|$$

از مقایسه نابرابری بالا و فرض استقرا، درستی حکم استقرا

نتیجه می شود :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

مسأله ۲. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

حل.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \quad (۱)$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x|$$

$$\Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y| \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

مسأله ۳. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

حل.

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$$

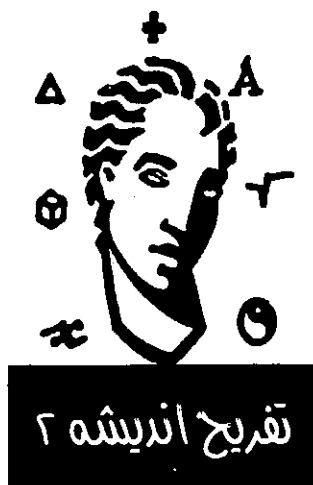
$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y| \quad (۱)$$

اگر در رابطه (۱) « x را به y » و « y را به x » تبدیل کنیم :

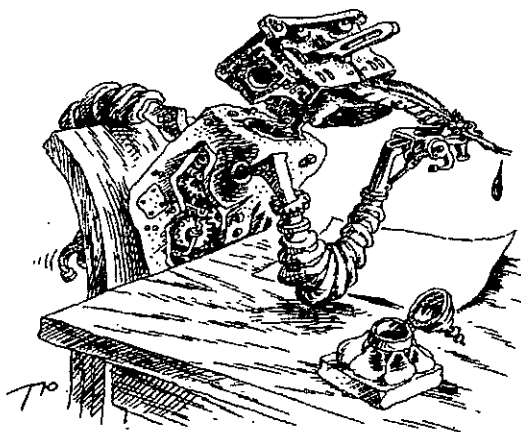
$$|x + y| \geq |y| - |x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|x + y| \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x + y|$$



چرخهای گردنده



عمه خانم تصوّر می کرد نشان دادن فیلمهایی که تابستان گذشته در تعطیلات گرفته است، بدنیهست. اما درست ۵ دقیقه و ۲۰ ثانیه پس از شروع نمایش، زمانی که سرعت چرخشی که از آن فیلم برداشته می شود، $\frac{1}{4}$ برابر سرعت چرخشی که فیلم به دور آن می پیچد، بود، فیلم پاره شد. چند دقیقه از فیلم مورد بحث را از دست داده ایم؟

جواب در صفحه ۸۸

$x^2 + 1 \neq 0$ ، برای هر $x \neq 0$ داریم $x^2 > 0$. پس $x^2 + 1 > 0$ در نتیجه $x^2 + 1$ هیچ گاه صفر نمی شود.

تمرین

۱- برای عددهای حقیقی a ، b و c ثابت کنید:

(الف) اگر $a > b$ و $c > 0$ ، آن گاه $ac > bc$.

(ب) اگر $a > b$ و $c < 0$ ، آن گاه $ac < bc$.

۲- نشان دهید مجموع دو عدد منفی همواره یک عدد منفی است.

۳- اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ ثابت کنید:

$$(الف) a + 3c \leq 3d + 2b$$

$$(ب) \frac{1}{4}a - 4d \leq \frac{1}{4}b - 4c$$

۴- اگر $a < b$ و $c < d$ ، در این صورت درباره $(a-b) \times (d-c)$

چه می توان گفت؟

۵- فرض کنیم $0 < a < b$ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه

$$\dots a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$$

۶- فرض کنیم $a > 1$ ، به ازای عدد گویای $r > 0$ ، ثابت کنید

$$a^r > 1 \text{ و به ازای عدد گویای } r < 0, \text{ ثابت کنید } a^r < 1.$$

۷- اگر $0 < a < 1$ ، به ازای عدد گویای $r < 0$ ، ثابت کنید

$$a^r > 1 \text{ و به ازای عدد گویای } r > 0, \text{ ثابت کنید } a^r < 1.$$

۸- ماکزیمم و می نیمم عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$$۱) A = |2x - 1| - |2x + 3|$$

$$۲) B = |5x + 1| - |4 - 5x|$$

۹- نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید:

$$۱) (x - 2)^2 \leq 9$$

$$۲) (2x - 1)^2 \geq 1$$

$$۳) (3x - 2)^2 \leq (5x + 4)^2$$

$$۴) (x - 3)^2 \geq (2x - 1)^2$$