

نابرابریها

میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها

(قسمت چهارم)

● میرشهرام صدر

در شماره های قبل با تعریف و خواص و قضایای نابرابریها آشنا شدیم، اکنون مطالب دیگری را درباره میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها، مطرح می کنیم.

۱- میانگین حسابی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی

باشند، عدد $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی دو عدد a و b گوئیم.

۲- میانگین هندسی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی

مثبت باشند، عدد $\sqrt{ab}$ را میانگین هندسی دو عدد a و b گوئیم.

قضیه ۱۴: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، ثابت کنید که،

واسطه حسابی، از میانگین هندسی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

به دو طرف نابرابری اخیر، $2ab$ را می افزاییم:

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0)$$

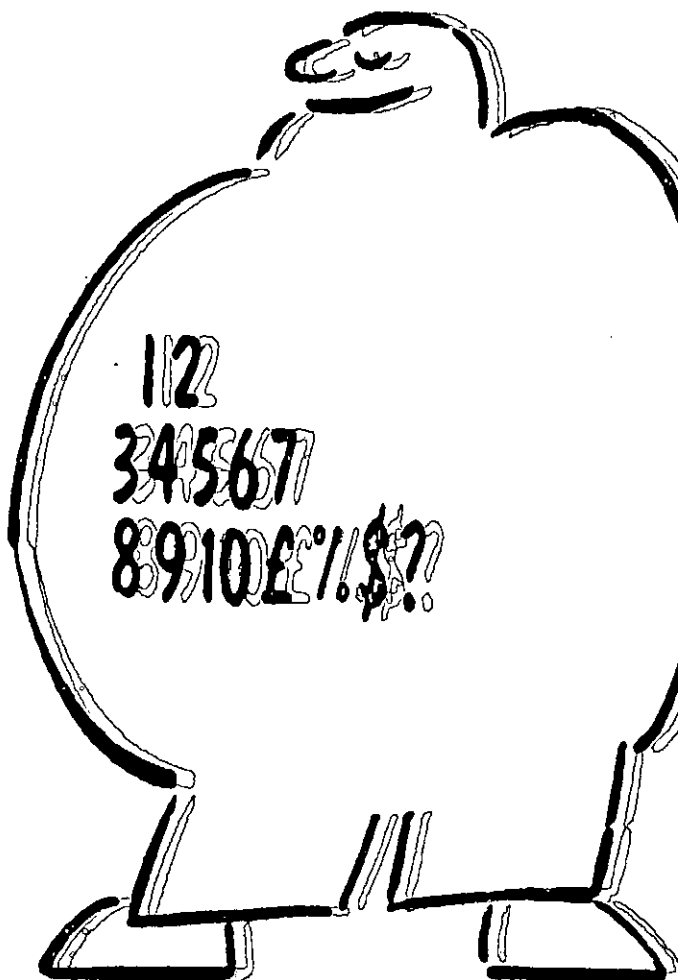
$$\text{یا } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نابرابری کوشی ۱

فرض کنیم n عدد حقیقی مثبت به صورت $a_1, a_2, \dots, a_n$

داشته باشیم، نابرابری زیر که در واقع تعمیمی از قضیه ۱۳ (در

مقاله شماره قبل) است، به نام نابرابری «کوشی» معروف است:



مثال: ثابت کنید که برای هر دو عدد حقیقی $a > 1$ و $b > 1$ ، داریم $\log_a^b + \log_b^a \geq 2$.

حل: می‌دانیم که $\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$ ، بنابراین:

$$\log_a^b + \log_b^a = \log_a^b + \frac{1}{\log_a^b} \geq 2 \sqrt{\log_a^b \times \frac{1}{\log_a^b}} = 2$$

$$\Rightarrow \log_a^b + \log_b^a \geq 2$$

مثال: بیشترین مقدار کسر $A = \frac{x}{1+x^2}$ را برای هر عدد حقیقی

$x > 0$ بیابید.

چون $x \neq 0$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر x ، داریم:

$$A = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + x}$$

اما برای هر $x > 0$ ؛ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ، در نتیجه $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}$ ، پس

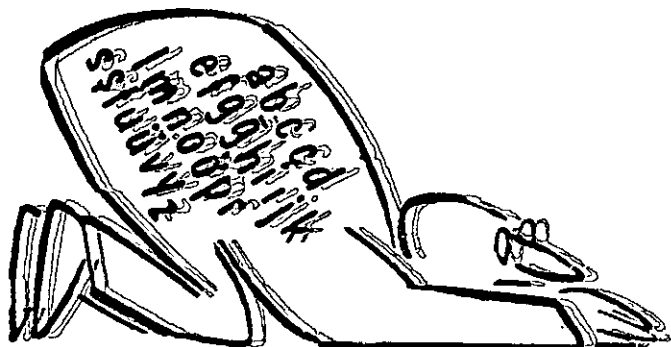
$$A \leq \frac{1}{2}$$
، بنابراین بیشترین مقدار کسر A ، برابر است با $\frac{1}{2}$.

۳- میانگین توافقی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی ناصفر باشند، عدد $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ را

میانگین توافقی دو عدد a و b گوئیم.

مثال



$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

مسئله ۱: برای هر عدد حقیقی $x > 0$ ، ثابت کنید:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حل:

روش اول: چون $x > 0$ ، با توجه به قضیه ۱۳ داریم:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حالت برابری، وقتی اتفاق می‌افتد که، $x = \frac{1}{x}$ یعنی $x = 1$.

روش دوم:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{2x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

مسئله ۲: برای هر عدد حقیقی $x < 0$ ثابت کنید:

$$x + \frac{1}{x} \leq -2$$

حل:

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x < 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \leq \frac{-2x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

نتیجه: با توجه به مسئله‌های ۱ و ۲، می‌توان نوشت:

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$$

مثال: ثابت کنید که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، نابرابری $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

همواره برقرار است.

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\geq 2 \sqrt{\sqrt{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2 \Rightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{2ab}{4} \geq 0$$

اگر به دو طرف نابرابری اخیر $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$ را بیفزاییم:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{2ab}{4} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

نتیجه: با مقایسه قضیه‌های ۱۳، ۱۴، ۱۵ برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

قضیه ۱۷ (نامساوی برنولی): اگر $x+1 \geq 0$ و $0 < \alpha < 1$

در این صورت داریم: $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

و اگر $\alpha < 0$ یا $\alpha > 1$ ، در این صورت: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

علامت تساوی در هر دو حالت به ازای $x=0$ برقرار است (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

مسئله ۴: اگر $-1 < \alpha < 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$-1 < \alpha < 0 \Rightarrow 0 < \alpha+1 < 1$$

حل:

طبق نامساوی برنولی رابطه‌های زیر را داریم:

$$(1 + \frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1 + (\alpha+1) \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1 + \frac{\alpha+1}{n}$$

$$(1 - \frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1 - (\alpha+1) \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}$$

اگر دو طرف نابرابری‌های بالا را در $n^{\alpha+1}$ ضرب کنیم، داریم:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha \quad (1)$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} > n^\alpha \quad (2)$$

قضیه ۱۵: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین هندسی از واسطه توافقی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، طبق قضیه ۱۳ داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $ab > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

مسئله ۳: فرض کنیم که a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند،

$$\text{ثابت کنید: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

حل: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، طبق قضیه‌های ۱۴ و ۱۳، داریم:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

۴ - میانگین مربعی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، عدد $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ را میانگین مربعی دو عدد a و b گوئیم.

قضیه ۱۶: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین مربعی از میانگین حسابی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

n بعدی، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دارای مختصات $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ هستند، با توجه به تعریف دیگر ضرب نقطه‌ای بردارها داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

و قضیه مربوط به طول بردارها می‌گوید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \times \sum_{i=1}^n b_i^2$$

دو نابرابری هم‌ارز

دو نابرابری را هم‌ارز گوئیم، در صورتی که هر یک، با استفاده از خاصیتها و قضیه‌های نابرابری و اعمال جبری؛ دیگری را نتیجه دهد. به عنوان مثال، برای اثبات نابرابری کوشی ۲ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad (\text{نابرابری کوشی ۲})$$

$$\Rightarrow a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd \leq a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$$

از دو طرف نابرابری $a^2 c^2$ و $a^2 d^2$ را کم می‌کنیم:

$$a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \geq 0 \Rightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است و با نابرابری حکم هم‌ارز است، پس نابرابری کوشی ۲ درست است. با توجه به نابرابری آخر، حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که، $ad - bc = 0$

$$\text{یا } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

مثال: نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

$$۱) a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

$$۲) a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$$

با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

نابرابری کوشی ۲

فرض کنیم a, b, c, d عددهای حقیقی دلخواهی باشند، ثابت کنید:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

و برابری وقتی برقرار است که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

برهان: برای عددهای حقیقی a, b, c, d داریم:

$$(ad - bc)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \geq 0$$

با اضافه کردن $a^2 c^2 + b^2 d^2$ به دو طرف نابرابری اخیر، داریم:

$$a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 \geq a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd$$

با دسته‌بندی جمله‌های دو طرف نابرابری، خواهیم داشت:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

با توجه به نابرابری $(ad - bc)^2 \geq 0$ حالت برابری، تنها وقتی

پیش می‌آید که، $ad - bc = 0$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

نتیجه: فرض کنیم $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ عددهای حقیقی دلخواهی باشند. تعمیم نابرابری کوشی ۲ به صورت زیر است:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$\times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

نتیجه فوق را با استفاده از نماد زیگما می‌توان به صورت

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad \text{نوشت.}$$

یک راه حل هندسی زیبا برای اثبات این نابرابری وجود دارد، که در این جا ارائه می‌شود:

با توجه به هندسه بردارها و تعریف ضرب نقطه‌ای دو بردار،

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad \text{می‌دانیم:}$$

که در این رابطه $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ طولهای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند

و $0 \leq \alpha \leq \pi$ زاویه بین دو بردار است. اکنون در یک فضای

$$a^2 - a + 1 \geq a \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر هم ارز حکم و درست است، در نتیجه حکم درست می باشد. حالت تساوی در صورتی که $a=1$ ؛ پیش می آید.
(۵) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) +$$

$$(b^2 - 2bc + c^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر درست و هم ارز با حکم است، پس حکم درست می باشد.

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2 \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (۶)$$

$$\geq ab(a+b)$$

چون $b > 0$ و $a > 0$ ، پس $a+b > 0$ ؛ با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a+b$ داریم:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همیشه درست است، در نتیجه، حکم درست می باشد.

(۷) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می کنیم:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، در نتیجه، حکم درست می باشد.

$$a^4 + b^4 > a^2b + ab^2 \quad (a \neq b) \quad (۸)$$

$$\Rightarrow a^4 - a^2b + b^4 - ab^2 > 0$$

$$\Rightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) > 0$$

چون $a \neq b$ در نتیجه $a-b \neq 0$ ، با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a-b$ ، دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر $a-b > 0$ ، آن گاه $a^2 - b^2 > 0$ یا $a^2 > b^2$ ، که نابرابری اخیر با توجه به فرض درست است.

$$(۳) a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

$$(۴) a^2 + 1 \geq a^2 + a \quad (a \geq -1)$$

$$(۵) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$(۶) a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2 \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(۷) a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$(۸) a^4 + b^4 > a^2b + ab^2 \quad (a \neq b)$$

حل:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 \geq 2a + 2b + 2c \quad (۱)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر درست است و با نابرابری حکم هم ارز است، پس نابرابری حکم درست است. حالت تساوی، وقتی پیش می آید که، $a=b=c=1$.

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 - 2a - 12b - 6c + 1 + 9 + 3 \geq 0 \quad (۲)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر، هم ارز حکم و درست است، لذا حکم درست می باشد و حالت تساوی وقتی پیش می آید که، $c=1$ و

$$a=1 \text{ و } b=\frac{3}{2}$$

(۳) دو طرف نابرابری را در $(a+b)$ ضرب می کنیم و دو حالت

زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: $a+b \geq 0$ ، داریم:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 0 \Rightarrow a^3 \geq -b^3$$

چون فرض کردیم که $a+b \geq 0$ یا $a \geq -b$ ، بنابراین نابرابری آخر درست است؛ در نتیجه، نابرابری حکم درست می باشد.

حالت دوم: $a+b < 0$ ، داریم:

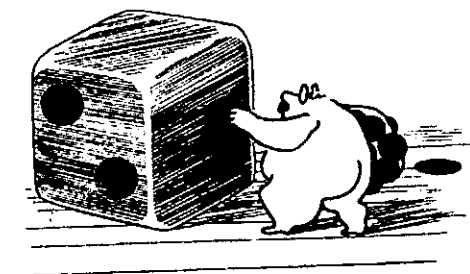
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \leq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq 0 \Rightarrow a^3 \leq -b^3$$

چون فرض کردیم که $a+b < 0$ یا $a < -b$ ، بنابراین نابرابری آخر درست است، در نتیجه، نابرابری حکم درست است.

$$a^2 + 1 \geq a^2 + a \Rightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) \geq a(a+1) \quad (۴)$$

چون $a \geq -1$ ؛ پس $a+1 \geq 0$ ، بنابراین دو طرف نابرابری اخیر

را بر $(a+1)$ تقسیم می کنیم:



تعداد نقطه‌هایی که روی سطح یک مهره معمولی گذاشته می‌شوند اتفاقی نیست. این نقطه‌ها طوری گذاشته می‌شوند که مجموع نقطه‌هایی دو سطح مقابل برابر ۷ باشد؛ مثلاً ۶ در مقابل ۱ است، ۵ در مقابل ۲ و ۴ در مقابل ۳. اما می‌توان نقطه‌های روی شش وجه (سطح) یک مهره را به چندین صورت مختلف گذاشت.

آیا می‌توانید بگویید به چند صورت؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

حالت دوم: اگر $a - b < 0$ ، آن‌گاه $a^2 - b^2 < 0$ یا $a^2 < b^2$ ، که نابرابری اخیر با توجه به فرض، درست است.

مثال: ثابت کنید برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$ ؛ معادله زیر، همواره دارای دو ریشه حقیقی است:

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$$

حل: در صورتی که معادله بالا را بر حسب x مرتب کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ac)x + 3abc = 0$$

برای این که معادله درجه دوم، دارای دو ریشه حقیقی باشد، باید مبین معادله مثبت باشد؛ یعنی $\Delta > 0$ ، بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\Delta = 4(ab+bc+ac)^2 - 4(a+b+c) \times 3abc > 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^2 - 3(a+b+c)abc > 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2$$

$$- 3a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2 > 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 > 0$$

دو طرف نابرابری اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم؛ در نتیجه:

$$(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) +$$

$$(a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2) > 0$$

$$\Rightarrow (ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2 > 0$$

چون نابرابری آخر درست و هم‌ارز با نابرابری (۱) است، پس نابرابری (۱) برقرار است.

