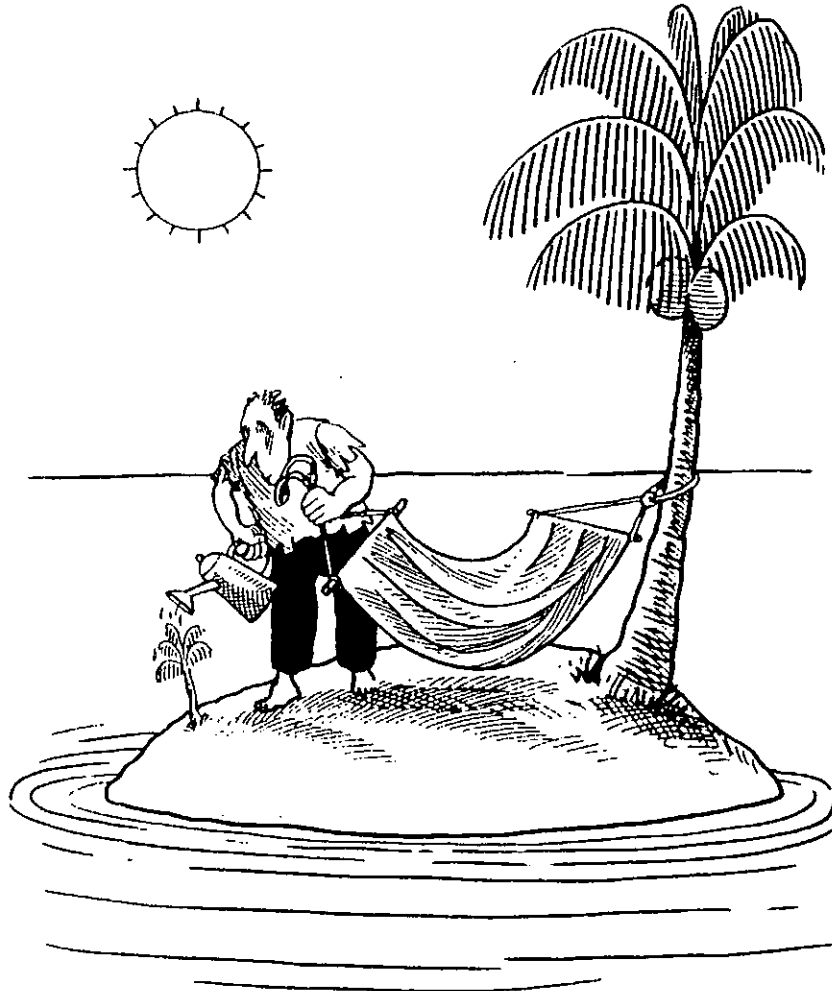




خاصیتها و قضیه‌ها

در شماره قبل، تعریف نابرابریها بیان شد، در این شماره به بررسی خاصیتها و قضایای نابرابریها می‌پردازیم.

خاصیتهای نابرابری

برای عددهای حقیقی a ، b و c داریم:

۱- اگر $a < b$ و $b < c$ ، آن‌گاه $a < c$ (خاصیت تعدی).

۲- اگر $a < b$ ؛ در این صورت $a + c < b + c$.

مثال. $-2 < 4 \Rightarrow -2 + 3 < 4 + 3$

۳- اگر $a < b$ ؛ در این صورت $a - c < b - c$.

مثال. $-2 < 4 \Rightarrow -2 - 3 < 4 - 3$

۴- اگر $a < b$ و $c > 0$ ؛ در این صورت $ca < cb$.

مثال. $-2 < 4$ ، $3 > 0 \Rightarrow 3(-2) < 3(4)$

۵- اگر $a < b$ و $c < 0$ ؛ در این صورت $ca > cb$.

مثال. $-2 < 4$ ، $-3 < 0 \Rightarrow -3(-2) > -3(4)$

۶- اگر $a < b$ و $c > 0$ ؛ در این صورت $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

مثال. $-2 < 4$ ، $2 > 0 \Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{4}{2}$

نابرابریها

(قسمت دوم)

● میر شهرام صدر

برهان. قضیه را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

حالت اول: اگر $a > 0$ ؛ بنا بر خاصیت ۴ نابرابریها:

$$a > 0 \Rightarrow a \times a > a \times 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

حالت دوم: اگر $a < 0$ ، با توجه به قضیه ۳ نتیجه می‌گیریم که

$$-a > 0 \text{، پس:}$$

$$-a > 0 \Rightarrow (-a) \times (-a) > (-a) \times 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

قضیه ۵. عدد ۱ مثبت است؛ یعنی: $1 > 0$.

برهان. چون $1 \neq 0$ پس بنا بر قضیه ۴: $1^2 > 0$ ، اما $1^2 = 1$

پس:

$$1^2 = 1 > 0 \Rightarrow 1 > 0$$

قضیه ۶. اگر $a > b$ و $c > d$ ؛ در این صورت $a + c > b + d$.

برهان.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a > b \Rightarrow a - b > 0 \\ c > d \Rightarrow c - d > 0 \end{cases} &\Rightarrow a - b + c - d > 0 \\ &\Rightarrow a - b + c - d + b + d > 0 + b + d \\ &\Rightarrow a + c > b + d \end{aligned}$$

قضیه ۷. اگر $a > b > 0$ و $c > d > 0$ ؛ در این صورت

$$ac > bd$$

برهان. چون $c > 0$ و $b > 0$:

$$\begin{cases} a > b > 0 \Rightarrow ac > bc \\ c > d > 0 \Rightarrow bc > bd \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

نتیجه ۱. به کمک قضیه (۷) و با استفاده از استقرای ریاضی،

می‌توان ثابت کرد که اگر $a > b > 0$ و m یک عدد طبیعی باشد،

$$\text{آن گاه } a^m > b^m$$

مثال. ثابت کنید:

۱- معکوس یک عدد مثبت، عددی مثبت است.

۲- معکوس یک عدد منفی، عددی منفی است.

۳- اگر $a < b$ آن گاه $a^{-1} < b^{-1}$ (آن گاه $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$).

حل.

۱. فرض کنید عدد حقیقی $a > 0$ ، اگر $\frac{1}{a} < 0$ ، آن گاه

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} < 0 \times \frac{1}{a} \text{، یعنی } 1 < 0 \text{ که این یک تناقض است؛ پس } \frac{1}{a}$$

مثبت است.

۲. فرض کنید عدد حقیقی $a < 0$ ، اگر $\frac{1}{a} > 0$ ، آن گاه

۷- اگر $a < b$ و $c < 0$ ، در این صورت $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

$$\text{مثال. } -2 < 4 \text{، } -2 < 0 \Rightarrow \frac{-2}{-2} > \frac{4}{-2}$$

تذکر. خاصیت‌های بالا که دربارهٔ نماد «<» مطرح شد، در مورد

نمادهای «>»، «≤» و «≥» برقرار است.

با توجه به تعریف نابرابری، خاصیت‌های نابرابری قابل اثبات

هستند، در زیر خاصیت‌های (۱) و (۲) را ثابت می‌کنیم و اثبات

بقیه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

اثبات خاصیت (۱):

$$\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + p \quad (p > 0) \\ c = b + p' \quad (p' > 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = a + (p' + p)$$

چون $p + p' > 0$ بنابراین با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود

که $a < c$.

اثبات خاصیت (۲):

$$a < b \Rightarrow b = a + p \text{، } (p > 0)$$

به دو طرف برابری اخیر عدد c را اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$(b + c) = (a + c) + p \text{، } (p > 0)$$

با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود که:

$$a + c < b + c$$

قضیه ۱. فرض کنیم $a > 0$ و $b > 0$ دو عدد حقیقی باشند،

در این صورت $a + b > 0$.

برهان. به دو طرف نابرابری $a > 0$ عدد حقیقی b را می‌افزاییم:

$$a + b > 0 + b \Rightarrow a + b > b$$

با توجه به $\begin{cases} a + b > b \\ b > 0 \end{cases}$ و بنا بر خاصیت تعدی رابطه «>» داریم:

$$a + b > 0$$

قضیه ۲. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند؛ $a > b$

اگر و فقط اگر $a - b > 0$.

برهان.

$$a > b \Leftrightarrow a + (-b) > b + (-b)$$

$$\Leftrightarrow a - b > 0$$

قضیه ۳. برای عدد حقیقی a اگر $a < 0$ ، آن گاه $-a > 0$.

برهان.

$$a < 0 \Rightarrow -a + a < -a + 0 \Rightarrow 0 < -a$$

قضیه ۴. برای عدد حقیقی a اگر $a \neq 0$ ؛ در این صورت $a^2 > 0$.

با توجه به نتیجه ۴: $a^n \leq 1$ و این با فرض $a^n > 1$ تناقض دارد،
لذا فرض خلف ($a \neq 1$) باطل و حکم درست است؛ یعنی $a > 1$.
مثال. ثابت کنید:

۱- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و $a > b$ ، آن گاه
 $a^2 > b^2$.

۲- اگر a و b دو عدد حقیقی منفی باشند و $a > b$ ، آن گاه
 $a^2 < b^2$.

حل.

۱- بنابر قضیه (۷) داریم:

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ a > b > 0 \end{cases} \Rightarrow a \times a > b \times b \Rightarrow a^2 > b^2$$

۲- اگر $a > b$ در نتیجه $-b > -a$ که در آن $-a$ و $-b$ هر
دو عدد حقیقی مثبت می باشند؛ بنابر قسمت قبل $(-b)^2 > (-a)^2$
یعنی $a^2 < b^2$ یا $b^2 > a^2$.

قضیه ۹. فرض کنیم $a > 0$ ؛ $-a < x < a \Leftrightarrow x^2 < a^2$.

برهان. فرض کنیم $x^2 < a^2$ ، اگر $-a < x < a$ درست
نباشد، در نتیجه $x \geq a$ یا $x \leq -a$. اگر $x \geq a$ ، در نتیجه، بنابر
مثال قبل $x^2 \geq a^2$ که این خلاف فرض است و اگر $x \leq -a$ که در
آن $-a < 0$ ، بنابر مثال قبل $x^2 \geq a^2$ که این نیز خلاف فرض است؛
بنابراین در هر دو حالت به تناقض می رسیم، پس $-a < x < a$.
بعکس، اگر $-a < x < a$ سه حالت زیر را در نظر می گیریم:
حالت اول: $x > 0$ ؛ در این صورت از $x < a$ نتیجه می گیریم
 $x^2 < a^2$.

حالت دوم: $x < 0$ ؛ در این صورت از $-a < x$ نتیجه
می گیریم $x^2 < a^2$.

حالت سوم: $x = 0$ ؛ چون مربع هر عدد حقیقی مثبت است،
در نتیجه $x^2 < a^2$.

$\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{a} \times a$ ، یعنی $1 < 0$ که این یک تناقض است؛ پس $\frac{1}{a}$
منفی است.

۳. چون a ، b دو عدد حقیقی مثبت هستند، پس $a \times b$ نیز
مثبت است، در نتیجه $\frac{1}{ab}$ مثبت می باشد:

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\text{یا } 0 < b^{-1} < a^{-1}$$

قضیه ۸. اگر $a > 1$ و $b > 1$ آن گاه $ab > 1$.

برهان. روش اول: چون $a > 1 > 0$ و $b > 1 > 0$ ، طبق قضیه
(۷) داریم $ab > 1 \times 1$ یعنی $ab > 1$.
روش دوم:

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0 \\ b > 1 \Rightarrow b - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) > 0$$

$$\Rightarrow ab - a - b + 1 > 0$$

$$\Rightarrow ab > a + b - 1$$

چون $a > 1$ و $b > 1$ ، در نتیجه $a + b > 2$ ؛ بنابراین:

$$ab > a + b - 1 > 2 - 1 \Rightarrow ab > 1$$

نتیجه ۴. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهای حقیقی باشند و
 $a_1 > 1, a_2 > 1, \dots, a_n > 1$ ، آن گاه $a_1 a_2 \dots a_n > 1$.

نتیجه ۳. اگر $a > 1$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه $a^n > 1$.

زیرا می توان نوشت $a > 1, \dots, a > 1, a > 1$ در این صورت طبق
نتیجه قبل $a \cdot a \cdot \dots \cdot a > 1$ یعنی $a^n > 1$.
← مرتبه n →

نتیجه ۴. اگر $0 < a < 1$ آن گاه $a^n < 1$.

حل. چون $0 < a < 1$ ، بنابراین $\frac{1}{a} > 1$ و با توجه به نتیجه ۲:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^n} > 1 \Rightarrow a^n < 1$$

مثال. اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد و $a^n > 1$ ، آن گاه
 $a > 1$.

حل. از برهان «خلف» استفاده می کنیم. فرض کنیم که a عددی
حقیقی و مثبت باشد؛ به طوری که $a \neq 1$ ؛ پس $0 < a \leq 1$ ، بنابراین