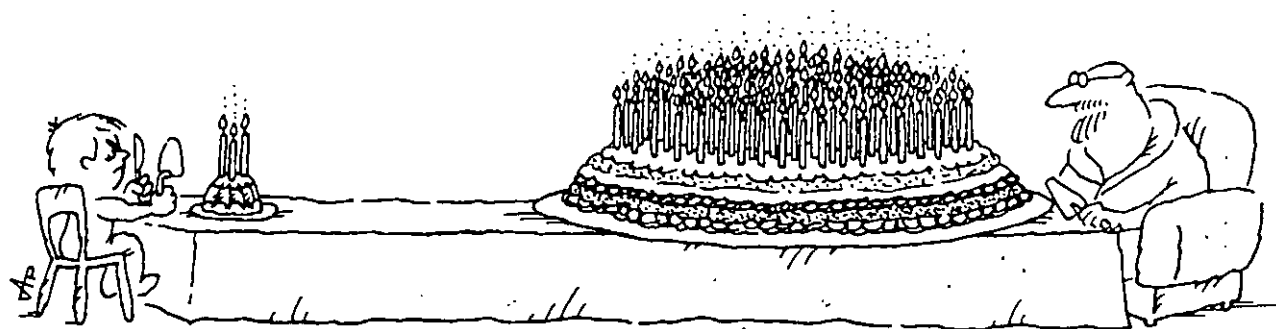


نابرابری ها

(قسمت اول)



صورت حاصل، بزرگتر یا مساوی با عدد حقیقی اولیه است؛ یعنی: اگر a عددی حقیقی و m نامنفی باشد:

$$a + m \geq a$$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند؛ به طوری که $a > b$ یا $a = b$ ، در این صورت می نویسیم:

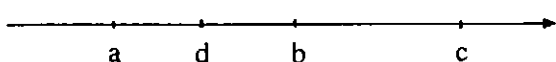
$$a \geq b$$

و می خوانیم « a بزرگتر یا مساوی با b » یا « a ناکثر از b » است. هرگاه $a < b$ یا $a = b$ در این صورت می نویسیم:

$$a \leq b$$

و می خوانیم « a کوچکتر یا مساوی با b » یا « a نایبتر از b » است.

مفهوم نمادهای $>$ و $<$ را می توان روی محور اعداد حقیقی بیان کرد؛ اگر $a < b$ ، در این صورت روی محور، a در سمت چپ b و اگر $c > d$ ، در این صورت، c در سمت راست d روی محور قرار دارد (شکل ۱)



(شکل ۱)

عددهای مثبت و منفی و اصل تثلیث

عدد حقیقی a را مثبت گوئیم، هرگاه $a > 0$ و آن را منفی گوئیم، هرگاه $a < 0$ ؛ بنا بر اصل تثلیث به ازای هر عدد حقیقی دلخواه مانند a ، همواره یکی از رابطه های $a > 0$ ، $a < 0$ و $a = 0$ برقرار است.

برای مقایسه دو عدد حقیقی متمایز، از نمادهای نابرابری $<$ یا $>$ استفاده می کنیم؛ به طور مثال، برای مقایسه دو عدد ۸ و ۱۲، نابرابری زیر را می نویسیم:

$$8 < 12$$

و می خوانیم «۸ کوچکتر از ۱۲» یا می نویسیم:

$$12 > 8$$

و می خوانیم «۱۲ بزرگتر از ۸».

تعریف $a < b$ و $a > b$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند؛ a را کوچکتر از b یا b را بزرگتر از a گوئیم، هرگاه عدد حقیقی مثبتی مانند P یافت شود، به گونه ای که داشته باشیم:

$$a + p = b \quad (P > 0)$$

در این صورت می نویسیم:

$$a < b$$

و می خوانیم « a کوچکتر از b » یا می نویسیم:

$$b > a$$

و می خوانیم « b بزرگتر از a ».

تعریف $a \geq b$ و $a \leq b$

اگر به هر عدد حقیقی یک عدد نامنفی^۱ را بیفزاییم، در این

عددهای نامنفی و نامثبت

عدد حقیقی a را نامنفی گوئیم، هرگاه $a \geq 0$ و آن را نامثبت گوئیم، هرگاه $a \leq 0$.

نابرابری دو گانه (مضاعف)

نابرابری دوگانه $a < x \leq b$ به این مفهوم است که $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$ و x می تواند بین a و b و برابر با b باشد؛ اما x برابر با a نیست. مجموعه همه عددهایی چون x را که در نابرابری دوگانه $a < x \leq b$ صدق می کنند، یک «بازه» (فاصله) می نامند و در این حالت، آن را با نماد $(a, b]$ نشان می دهند:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

در نابرابری بالا عدد a را نقطه پایانی چپ بازه گویند و نماد « $($ » بیان کننده این است که بازه شامل a نیست و عدد b را نقطه پایانی راست بازه گوئیم و نماد « $]$ » به این معناست که بازه شامل b است. نمادهای مختلف بازه ها روی محور اعداد حقیقی، در جدول زیر مشخص شده است:

نام بازه	نمودار خطی	نماد نابرابری	نماد بازه
۱. بسته		$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
۲. نیم باز از طرف راست		$a < x \leq b$	$(a, b]$
۳. نیم باز از طرف چپ		$a \leq x < b$	$[a, b)$
۴. باز		$a < x < b$	(a, b)
۵. بازه ی کران		$x \geq a$	$[a, \infty)$
۶. بازه ی کران		$x \leq a$	$(-\infty, a]$
۷. بازه ی کران		$x > a$	(a, ∞)
۸. بازه ی کران		$x < a$	$(-\infty, a)$

ما از علامت ∞ (بی نهایت مثبت) و علامت $-\infty$ (بی نهایت منفی) استفاده کرده ایم؛ اما باید مراقب باشید که این علامتها را با عددهای حقیقی اشتباه نکنید؛ زیرا آنها از خواص عددهای حقیقی پیروی نمی کنند، به همین جهت است که از نماد « $($ » برای بازه های بی کران استفاده کرده ایم.

مثال: بازه های زیر را ابتدا روی محور اعداد حقیقی و سپس آنها را به صورت نابرابری مشخص کنید.

۱) $[-2, 3)$

۲) $(-4, 2)$

۳) $[-2, \infty)$

۴) $(-\infty, 3)$

حل:

۱) $-2 \leq x < 3$

۲) $-4 < x < 2$

۳) $x \geq -2$

۴) $x < 3$

مثال: نابرابریهای زیر را ابتدا به صورت فاصله و سپس آنها را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.

۱) $-3 < x \leq 3$

۲) $2 \geq x \geq -1$

۳) $x > 1$

۴) $x \leq 2$

حل:

۱) $(-3, 3]$

۲. برای از بین بردن اشتباه، بهتر است نابرابری دو گانه $2 \geq x \geq -1$ را به صورت $-1 \leq x \leq 2$ نمایش دهیم، سپس آن را به صورت بازه مشخص کنیم:

$[-1, 2]$

۳) $(1, \infty)$

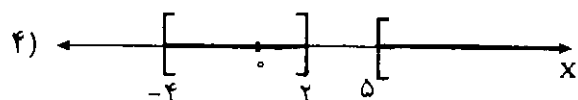
۴) $(-\infty, 2]$

اجتماع و اشتراک بازه ها

چون بازه ها مجموعه هایی از عددهای حقیقی هستند، بنابراین وقتی در مورد بازه ها مطالعه می کنیم، دو عمل اجتماع و اشتراک روی بازه ها مفید خواهند بود.

تعریف اجتماع و اشتراک

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، اجتماع مجموعه A و B را با نماد $A \cup B$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف



$$A \cup C = [-4, 2] \cup [5, \infty)$$

$$5) A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = [-4, 4) - (-2, 2)$$

$$\Rightarrow A \Delta B = [-4, -2] \cup (2, 4)$$

مثال: در صورتی که $A = [1, \infty)$ و $B = (-\infty, 3)$ و $C = [-2, 2]$ ، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

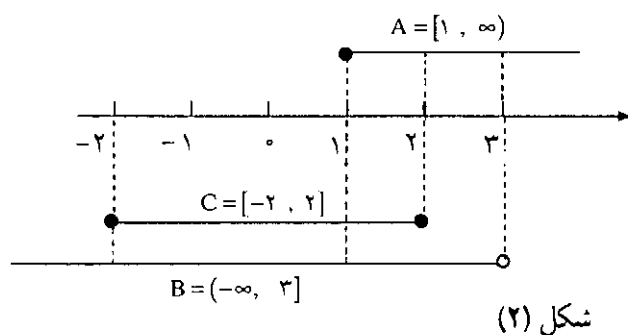
$$1) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$2) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$3) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

حل:

۱- ابتدا بازه‌های A ، B و C را روی محور مشخص می‌کنیم:

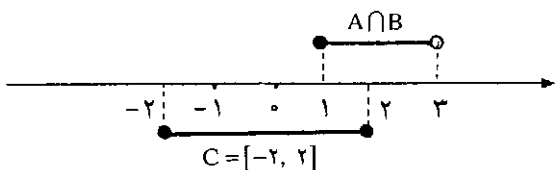


شکل (۲)

با توجه به شکل بالا ملاحظه می‌کنیم:



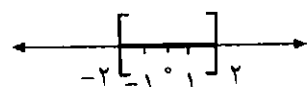
$$A \cap B = [1, 3)$$



$$(A \cap B) \cap C = [1, 2]$$

(۱)

با توجه به شکل (۲):



$$B \cap C = [-2, 2]$$

می‌کنیم:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$$

اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$$

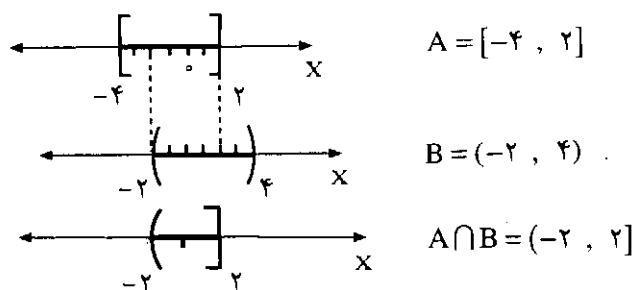
مثال: فرض کنیم $A = [-4, 2]$ و $B = (-2, 4)$ و $C = [5, \infty)$ مطلوب است:

$$1) A \cap B \quad 2) A \cup B \quad 3) A \cap C \quad 4) A \cup C$$

$$5) A \Delta B$$

حل:

۱- ابتدا بازه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت یک بازه مشخص می‌نماییم:

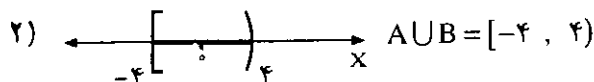


$$A = [-4, 2]$$

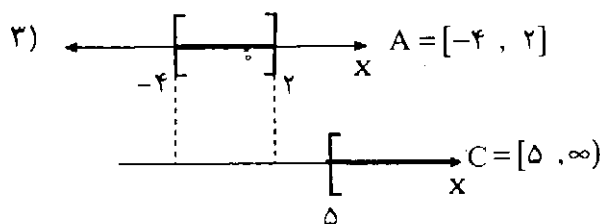
$$B = (-2, 4)$$

$$A \cap B = (-2, 2]$$

تذکر: اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه، به هر دو بازه تعلق داشته باشد، در این صورت از نماد «]» برای نقطه پایانی استفاده می‌کنیم و اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه، فقط به یکی از بازه‌ها متعلق باشد، در این صورت از نماد «)» استفاده می‌نماییم.



$$A \cup B = [-4, 4)$$



$$A = [-4, 2]$$

$$C = [5, \infty)$$

$$A \cap C = \emptyset$$

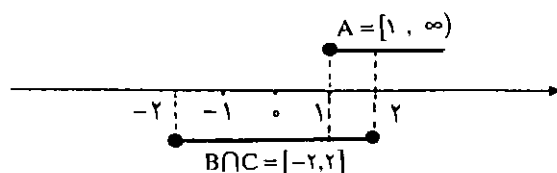
درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید: $C = (-\infty, 0]$

$$۱) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$۲) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$۳) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$۴) A - B = A \cap B'$$



$$A \cap (B \cap C) = [1, 2] \quad (۲)$$

با مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲):

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

۲- با توجه به (شکل ۲) ملاحظه می‌کنیم که:

$$B \cap C = [-2, 2] \text{ و } A \cap C = [1, 2]$$

$$A \cup B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

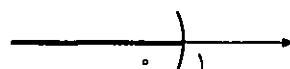
$$(A \cup B) \cap C = \mathbb{R} \cap C = C = [-2, 2] \quad (۳)$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = [1, 2] \cup [-2, 2] = [-2, 2] \quad (۴)$$

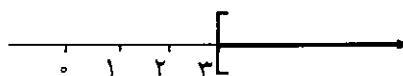
با مقایسه رابطه‌های (۳) و (۴) داریم:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

۳- چون $A \cup B = \mathbb{R}$ ، بنابراین $(A \cup B)' = \emptyset$ (۵)



$$A' = (-\infty, 1)$$



$$B' = [3, \infty)$$

$$A' \cap B' = (-\infty, 1) \cap [3, \infty) = \emptyset \quad (۶)$$

با توجه به رابطه‌های (۵) و (۶) داریم:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

۳- به جای علامت سؤال، نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین

کنید:

$$(۱) \text{ اگر } a - b = ۱, \text{ در این صورت } a ? b$$

$$(۲) \text{ اگر } u - v = -۲, \text{ در این صورت } u ? v$$

$$(۳) \text{ اگر } ۲(p - ۱) = ۲q - ۳, \text{ در این صورت } p ? q$$

۴- علامت عددهای حقیقی a ، b و c را به گونه‌ای تعیین

کنید که نابرابریهای زیر برقرار باشد.

$$(۱) \frac{ab}{c} > 0 \quad (۲) abc > 0 \quad (۳) \frac{a}{bc} > 0 \quad (۴) \frac{a^2}{bc} < 0$$



یادداشتها

۱- عددی را نامنفی گوئیم که بزرگتر یا مساوی صفر باشد. عدد حقیقی a نامنفی

است هرگاه $a \geq 0$.



تمرین

۱- هرگاه $A = [-۴, ۱]$ ، $B = (-۱, ۳]$ و $C = [۲, \infty)$

مجموعه‌های زیر را ابتدا روی محور، سپس به صورت بازه مشخص کنید.

$$۱) A \cup B \quad ۲) A \cap B \quad ۳) B \cup C$$

$$۴) B \cap C \quad ۵) A \Delta B \quad ۶) A' \Delta B'$$

۲- با فرض این که $A = (-۴, ۷)$ و $B = [-۸, ۳]$ و