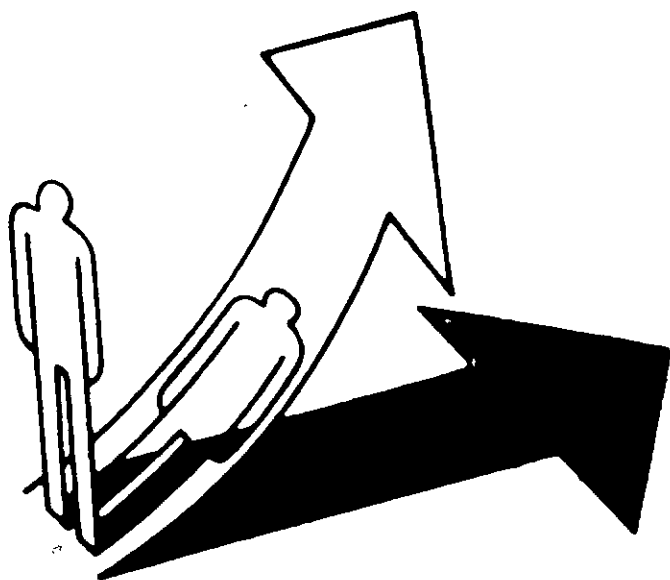
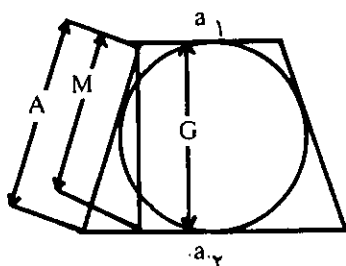


میانگین همساز

● پرویز شهریاری



میانگین حسابی a_1 و a_2 ، طول ارتفاع دوزنقه، میانگین هندسی و طول تصویر ارتفاع روی ساق، میانگین همساز آنها است.



میانگین همساز n عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$M = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

اگر میانگین همساز را (که به آن واسطه توافقی هم می‌گویند) با میانگین‌های مشهورتر یعنی میانگین حسابی

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

و میانگین هندسی $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ مقایسه کنیم معلوم می‌شود که از هر دوی آنها کوچکتر است: $A \geq G \geq M$ درواقع

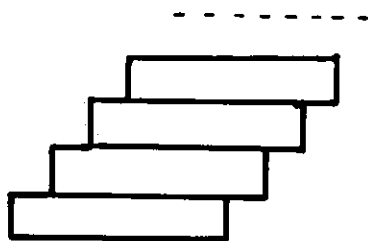
علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که همه عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ باهم برابر باشند.

بستگی بین سه میانگین به ازای $n=2$ را می‌توان به سادگی و با زیبایی، تعبیر هندسی کرد. دوزنقه‌ای با ساق‌های برابر و قاعده‌های به طولهای a_1 و a_2 در نظر می‌گیریم که بر دایره‌ای محیط باشد (به سادگی ثابت می‌شود که، چنین دوزنقه‌ای، همیشه وجود دارد). در اینصورت، طول ساق این دوزنقه،

مفهوم «میانگین» با مفهوم تصاعد بستگی نزدیک دارد. در تصاعد حسابی، هر جمله (به جز جمله اول و جمله آخر) میانگین حسابی دو جمله مجاور خود است. همچنین، در تصاعد هندسی، هر جمله (به جز جمله‌های اول و آخر) میانگین هندسی دو جمله مجاور خود است. به همین ترتیب می‌توان تصاعد همساز (یا تصاعد توافقی) را تعریف کرد: هر جمله تصاعد همساز (به جز دو جمله اول و آخر)، میانگین همساز دو جمله مجاور خود است. دنباله

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (n \in \mathbb{N})$$

نمونه‌ای از یک تصاعد همساز است. درواقع، دو جمله مجاور



جمله $\frac{1}{n}$ عبارتند از $\frac{1}{n-1}$ و $\frac{1}{n+1}$ ، که میانگین همساز آن‌ها، چنین است:

$$\frac{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}{2} = \frac{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}{2} = \frac{1}{n}$$

مجموع جمله‌های این تصاعد همساز، یعنی

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

را رشته همساز (با رشته توافقی) گویند.

گوتفرید ویلهلم لایب نیتس، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و فیلسوف آلمانی، در سال ۱۶۷۳ ثابت کرد که، این رشته، مجموعی برابر بی‌نهایت دارد. یعنی حد مجموع جزئی

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

با بزرگ شدن n ، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

استدلال لایب نیتس چنین بود. این n جمله از رشته همساز را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

هر جمله این رشته از $\frac{1}{2n}$ کوچکتر نیست، بنابراین، این مجموع از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است. باتوجه به این نکته، می‌توان نوشت:

$$1 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$$

روشن است، اگر جمله‌های رشته همساز را، به همین ترتیب گروه‌بندی کنیم، هربار تکه‌ای از رشته را به دست می‌آوریم که، مجموع جمله‌های آن، از $\frac{1}{2}$ کمتر نیست؛ در ضمن، تعداد این تکه‌ها در رشته، بی‌نهایت است.

جالب است، اگر آجری را روی سطح زمین قرار دهیم، آجر دوم را روی آن طوری قرار دهیم که انتهای چپ آن در نقطه $\frac{1}{2}$

آجر زیرین قرار گیرد، به همین ترتیب آجر سوم را در نقطه $\frac{1}{3}$ آجر زیر خود، آجر چهارم را در نقطه $\frac{1}{4}$ آجر سوم و غیره قرار دهیم، ساختمانی پایدار به دست می‌آید، و این ساختمان را می‌توان به هر اندازه بلند ساخت.

لئوناردر در سال ۱۷۴۰ ثابت کرد، مجموع S_n شبیه $\ln n$ افزایش می‌یابد. به زبان دقیقتر، عدد ثابت C وجود دارد، به نحوی که

$$S_n = \ln n + C + \varepsilon_n$$

که در آن، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، ε_n به سمت صفر میل می‌کند؛ در ضمن عدد

$$C = 0.57721\dots$$

ثابت اولر نامیده می‌شود.

رشته همساز تنها نمونه تصاعد همساز نیست. اگر a و b را

دوجمله اول یک تصاعد همساز بگیریم، جمله سوم آن برابر

$$\frac{ab}{2a-b}$$

$$\frac{ab}{(n-1)a + (n-2)b}$$

جمله اول یک تصاعد حسابی باشند، جمله $\ln n$ آن برابر

$$\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$$

هندسی باشند، جمله $\ln n$ آن برابر $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$ می‌شود.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که، به شرط $a \neq 0$ و $b \neq 0$

مجموع جمله‌های هر تصاعد همساز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

در فیزیک، اغلب با میانگین همساز روبه‌رو می‌شویم. به



● حمیدرضا امیری

۱- در ظرف A، ۳ مهره قرمز و ۵ مهره آبی در ظرف B، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در ظرف C، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. از ظرفهای A و B و C به ترتیب ۲ و ۳ و ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف D قرار می‌دهیم و سپس ۱ مهره به تصادف از D خارج می‌کنیم، احتمال آنکه مهره خارج شده قرمز باشد را به دست آورید.

۲- مطلوب است تعیین عددی طبیعی با شرایط زیر:

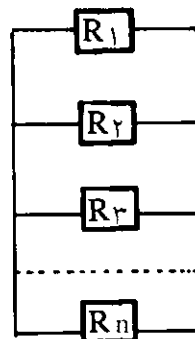
(I) تعداد مقسوم‌علیه‌های آن، فرد باشد.

(II) اگر آن عدد را بر ۳۹ تقسیم کنیم، باقی‌مانده ۱ و خارج قسمت عددی اول باشد.



عنوان نمونه، مقاومت دستگاهی که از n مقاومت موازی $R_1, R_2, \dots, R_n$ تشکیل شده است، برابر است با:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$



یعنی، برابر است با $\frac{1}{n}$ میانگین همساز آنها یا فاصله کانونی دستگاهی که شامل n عدسی نازک با فاصله‌های کانونی $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشد، برابر است با:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n}}$$

