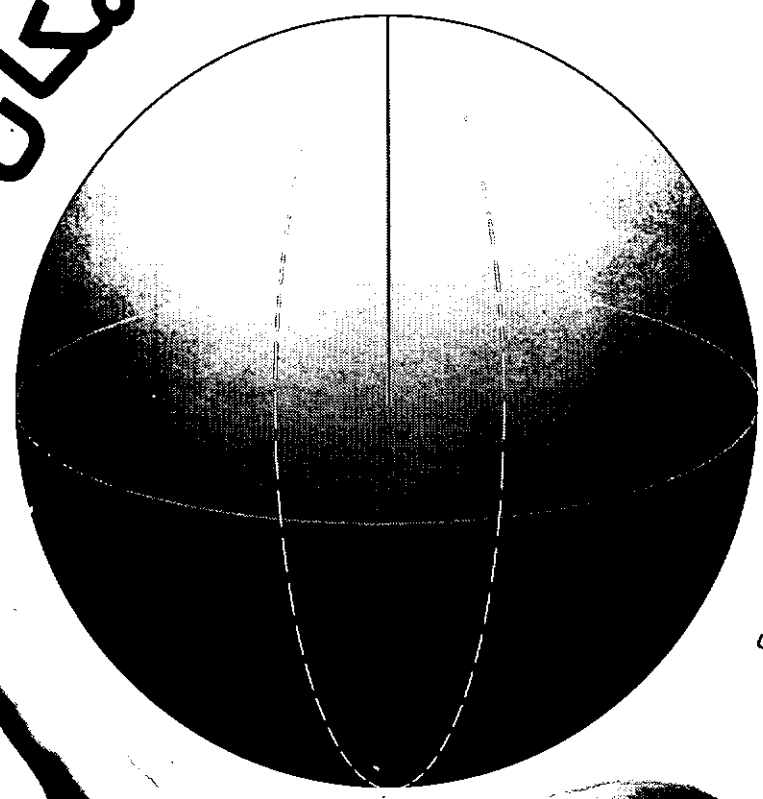
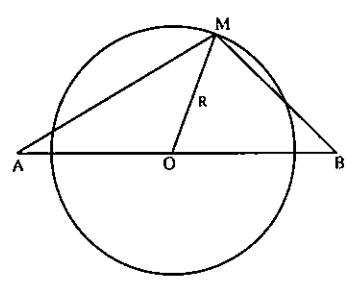




محمد هاشم رستمی

مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابتی است



و بنا به رابطه میانه‌ها در مثلث می‌توان نوشت:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطه O وسط پاره خط AB و $AB=a$ و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \quad (1)$$

در مثلث MAB، پاره خط MO میانه نظیر ضلع AB است

یا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{\gamma} \quad (2)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2MO^2 + \frac{a^2}{\gamma} = k^2 \Rightarrow OM = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2} \quad (3)$$

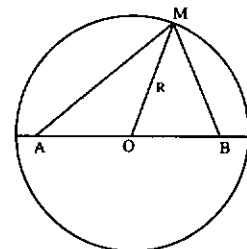
با توجه به ثابت بودن نقطه O و مقدارهای k^2 و a ، رابطه (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بعکس هر نقطه روی این دایره انتخاب کنیم، مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا

$$k^2 \geq \frac{a^2}{2} \quad \text{در این صورت:}$$

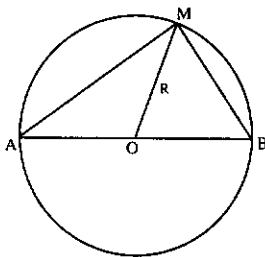
۱. اگر $k^2 > \frac{a^2}{2}$ باشد، $R > \frac{a}{\gamma}$ و در نتیجه دو نقطه A و

B درون دایره مکان واقع می‌شوند.



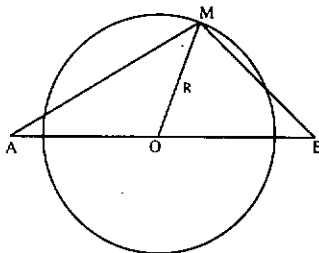
۲. اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = \frac{a}{\gamma}$ ، و دایره مکان از دو نقطه

A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت، دایره مکان، دایره به قطر پاره خط AB است.



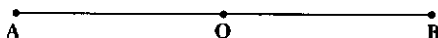
۳. اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{\gamma}$ و دو نقطه A و B

در بیرون دایره مکان قرار می‌گیرند.



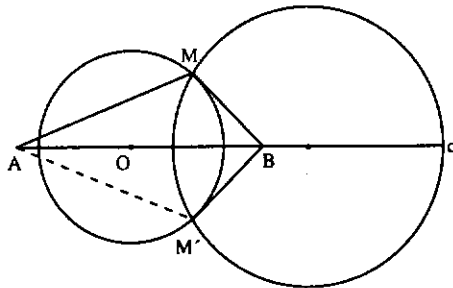
۴. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = 0$ و در نتیجه تنها نقطه O

وسط پاره خط AB ، جواب مسأله است.

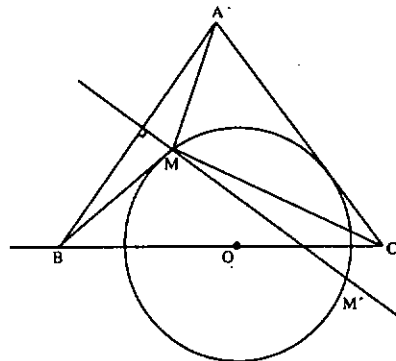


مثال ۱. دو نقطه A و B در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربع های فاصله اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله اش از همین دو نقطه برابر k' باشد.

حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 است، دایره ای است به مرکز O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایره C). این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه ای که نسبت فاصله اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k' باشد، دایره ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k' تقسیم می کند. این دایره را نیز رسم می کنیم و (C') می نامیم. نقطه های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله اند.

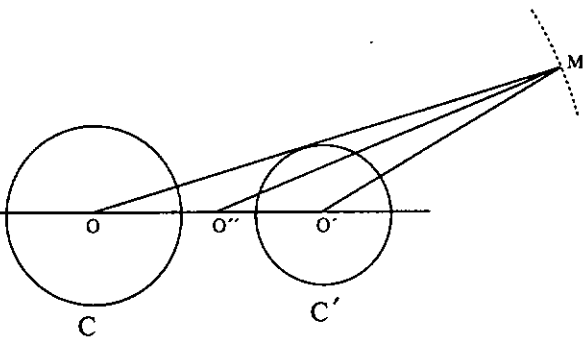


مثال ۲. سه نقطه A ، B و C غیر واقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه B و C برابر k^2 و از دو نقطه A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط BC و به شعاع $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2k^2 - BC^2}$ است. این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است، عمود منصف پاره خط AB است. این مکان را نیز رسم می کنیم. نقطه یا نقطه های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است.

مثال ۳. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در یک صفحه داده شده اند، مکان هندسی نقطه ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوت های آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد.



حل. فرض می کنیم M یکی از نقطه های مکان هندسی مورد نظر باشد؛ یعنی داشته باشیم: $P_{M(C)} + P_{M(C')} = k$ با توجه به این که:

$$P_{M(C)} = MO^2 - R^2 \text{ و } P_{M(C')} = MO'^2 - R'^2$$

است، با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$MO^2 - R^2 + MO'^2 - R'^2 = k$$

$$\Rightarrow MO^2 + MO'^2 = k + R^2 + R'^2 \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می دهد که مجموع مربع های فاصله نقطه M از دو نقطه ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $k + R^2 + R'^2$ است؛ بنابراین مکان هندسی این نقطه، دایره ای به مرکز وسط

مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه $A(-2,1)$ و $B(2,1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره ای به مرکز وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. بنابراین معادله این دایره را نوشته، نقطه یا نقطه های برخورد آن، با خط Δ را به دست می آوریم:

$$M(x,y) \text{ و } A(-2,1) \text{ و } B(2,1)$$

$$MA^2 + MB^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4y = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{معادله دایره مکان هندسی}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

نقطه های جواب مسأله

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ و } M_2\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

پاره خط OO' و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+R^2+R'^2)-OO'^2}$ است.

مثال ۴. دو نقطه $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده اند. معادله مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربع های فاصله اش از دو نقطه A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می کنیم $M(x,y)$ یکی از نقطه های مکان هندسی خواسته شده باشد. در این صورت داریم:

$$M(x,y) \text{ و } A(-1,3) \text{ و } B(2,-1)$$

$$MA^2 + MB^2 = 17$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 1 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4}$$

این معادله نشان می دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره ای به مرکز $O_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و به شعاع $R = \frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه ای روی خط $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ بیابید که

حل مسأله مسابقه ای برهان ۳۵

تشکیل می دهیم. روشن است که چون همه عددهای به فرم $2^n - 3$ ، عددهایی فرد هستند (چرا؟)، لذا $P_k = 2$ (برای $1 \leq k$) و در نتیجه $(P_1, 2) = 1$ و طبق قضیه کوچک فرما $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ خواهیم داشت:

$$\forall 1 \leq k: 2^{P_k-1} \equiv 1 \pmod{P_k}$$

$$\Rightarrow \left[2^{(P_1-1)}\right]^{(P_2-1)} \equiv 1 \pmod{P_2} \Rightarrow 2^{(P_1-1)(P_2-1)} \equiv 1 \pmod{P_2}$$

$$\Rightarrow N^{P_2} \equiv 2^{P_2} \pmod{P_2}$$

و لذا هیچ یک از عددهای اول P_1 و P_2 و ... و P_k عدد $N - 3$ را نمی شمارند و در نتیجه $N - 3$ نسبت به همه عددهای عضو S اول است. ولی روشن است که $N - 3$ نیز به فرم $2^n - 3$ بوده و عضو S نمی باشد، پس S نامتناهی است.

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی به فرم $2^n - 3$ ($n \in \mathbb{N}$) که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند، یک مجموعه نامتناهی است، یعنی بی شمار عدد طبیعی به فرم $2^n - 3$ یافت می شوند که همگی دو به دو نسبت به هم اول باشند.

حل: اثبات به کمک برهان خلف انجام می شود. فرض کنیم مجموعه این گونه عددها یک مجموعه متناهی S با k عضو به صورت زیر باشند:

$$S = \{2^{n_1} - 3, 2^{n_2} - 3, \dots, 2^{n_k} - 3\}$$

و طبق فرض مسأله:

$$\forall 1 \leq i, j \leq k: (2^{n_i} - 3, 2^{n_j} - 3) = 1$$

اکنون فرض می کنیم همه عوامل اول این k عدد، عددهای اول P_1 و P_2 و ... و P_k باشند، عدد طبیعی $N = 2^{P_1(P_2-1)(P_3-1)\dots(P_k-1)+1}$