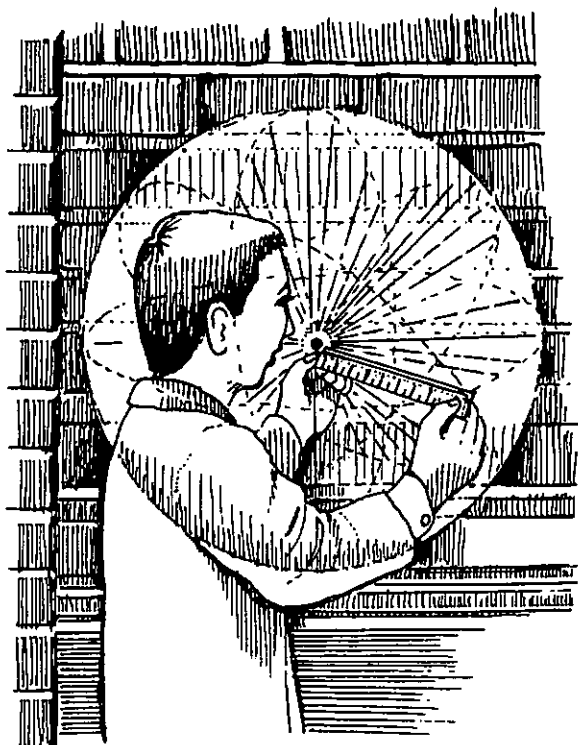


● محمد هاشم رستمی

ن (۲۵) مکان هندسی

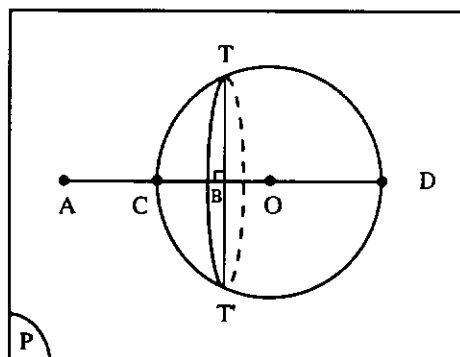
کره آپولونیوس



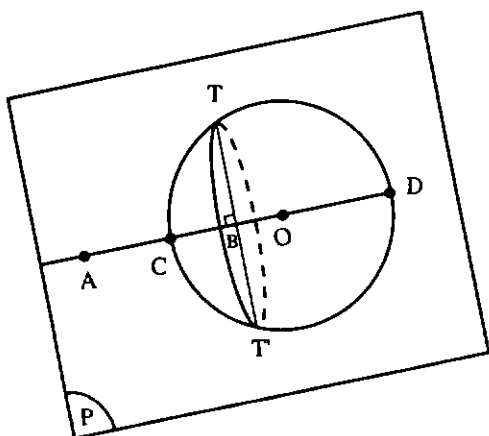
واقع در این صفحه، که همواره و در هر وضعی از صفحه P ، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B ، برابر مقدار ثابت k است. اثبات به روش تحلیلی: دو نقطه ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات $xyz - O$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k است، داریم:

۱۲.۳. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است، کره‌ای است که قطرش، پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی: صفحه دلخواه P را که بر دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد، در نظر می‌گیریم و در این صفحه، روی پاره خط AB و در امتداد آن، دو نقطه C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره خط AB را به نسبت k تقسیم کنند.



سپس دایره به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است. حال صفحه P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایره به قطر CD

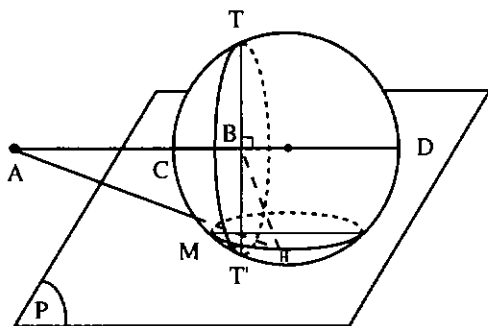


نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر باشد داریم:

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = k \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2k}{k-1}x + \frac{1}{k-1} = 0$$

که معادله بالا یک کره به مرکز $(\frac{k}{k-1}, 0, 0)$ و به شعاع $R = \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{(k-1)^2}}$ را مشخص می‌کند.



مثال ۱: صفحه P و دو نقطه A و B غیر واقع بر آن داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحه P ، جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحه P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است و اگر کره بر صفحه P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطه تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحه P را قطع نکند، مسأله دارای جواب نیست.

مثال ۲: خط D و دو نقطه A و B غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k باشد.

حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k است؛ یعنی کره به قطر CD را چنان که C و D پاره خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این کره با خط D ، جواب مسأله است. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

$$M(x, y, z) \Rightarrow A(x_1, y_1, z_1) \text{ و } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$MA = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}} = k \Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2 + k^2(y-y_2)^2 + k^2(z-z_2)^2$$

$$= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادله بالا، معادله‌ای به صورت:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2 x_2)}{k^2 - 1}x + \frac{2(y_1 - k^2 y_2)}{k^2 - 1}y +$$

$$\frac{2(z_1 - k^2 z_2)}{k^2 - 1}z + \frac{k^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}{k^2 - 1} = 0 \quad (1)$$

به دست می‌آید که معادله کره به مرکز نقطه

$$O_1\left(\frac{k^2 x_2 - x_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2 y_2 - y_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2 z_2 - z_1}{k^2 - 1}\right)$$

و به شعاع

$$R = \left| \frac{k}{k^2 - 1} \right|$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}$$

است.

بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ برابر مقدار ثابت k است. در ضمن، به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به عنوان مثال به کمک رابطه نیوتن، می‌توان ثابت کرد که قطر این کره، پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

تبصره: اگر دستگاه مختصات دکارتی در فضا را چنان اختیار کنیم که نقطه A منطبق بر مبدأ مختصات و $\overline{AB}$ بر دایره‌ای که محور x ها باشد، در این صورت خواهیم داشت $M = (x, y, z)$ اگر $B = (1, 0, 0)$ و $A = (0, 0, 0)$

و B برابر k است)، معادله مکان هندسی موردنظر را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(-1-6)}{2-1}x + \frac{2(2+4)}{2-1}y + \frac{2(0-2)}{2-1}z + \frac{2(9+4+1) - (1+4+0)}{2-1} = 0$$

معادله مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1, 2, 0) \text{ و } B(3, -2, 1) \text{ و } M(x, y, z) \text{ و } k = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \text{ و}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2}{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$2(x-3)^2 + 2(y+2)^2 + 2(z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$

معادله مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

مثال ۵: الف) معادله مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه $A(2, 0, -1)$ و $B(0, 3, 1)$ برابر $\sqrt{3}$ است.

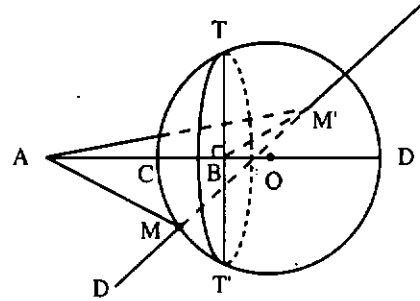
ب) ثابت کنید که خط $\frac{x+1}{1} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-2}{2}$ از مرکز

تقارن این مکان هندسی می‌گذرد.

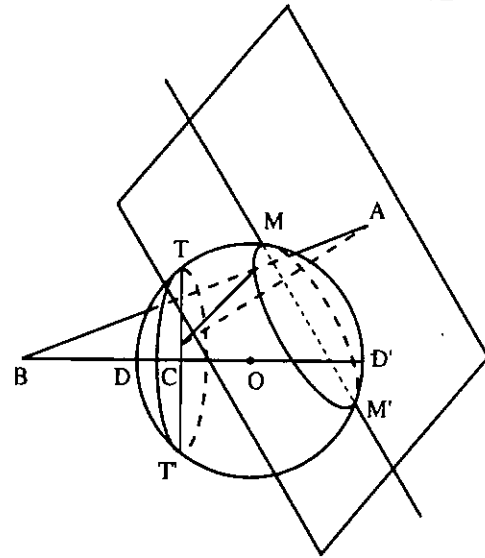
پ) نقطه‌هایی از خط D را مشخص کنید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطه A و B برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: الف) مکان هندسی خواسته شده، کره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادله این کره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2 x_2)}{k^2 - 1}x + \frac{2(y_1 - k^2 y_2)}{k^2 - 1}y + \frac{2(z_1 - k^2 z_2)}{k^2 - 1}z + \frac{k^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}{k^2 - 1} = 0$$



مثال ۳: سه نقطه A، B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطه A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت B و C برابر مقدار ثابت k است.



حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه A و C به یک فاصله است، صفحه P عمود منصف پاره خط AC است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه B و C برابر k است؛ یعنی کره به قطر DD' و D و D' پاره خط BC را به نسبت k تقسیم کرده‌اند را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره، با صفحه عمود منصف پاره خط AC، جواب مسأله است.

مثال ۴: دو نقطه $A(-1, 2, 0)$ و $B(3, -2, 1)$ داده شده است. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل. راه اول: با قرار دادن $(x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 0)$ و $(x_2 = 3, y_2 = -2, z_2 = 1)$ در معادله (۱) (معادله کره مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = 4 \Rightarrow MA^2 = 4MB^2 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 4(z-1)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 26x + 12y - 6z + 38 = 0$$

معادله کره مکان هندسی

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3}x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3}x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادله مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{26}{3}x + 4y + \frac{38}{3} = 0$$

$$A(x_1=2, y_1=0, z_1=-1) \text{ و } B(x_2=0, y_2=3, z_2=1)$$

$$\text{و } k = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(2-0)}{3-1}x + \frac{2(0-9)}{3-1}y +$$

$$\frac{2(-1-3)}{3-1}z + \frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1} = 0$$

معادله کره مکان هندسی مورد نظر

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{3} = 0$$

ب) مرکز کره بالا نقطه $O_1(-1, \frac{9}{3}, 2)$ است که مختصاتش در معادله خط D صدق می‌کند. پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ) نقطه برخورد خط D و کره مکان هندسی بالا را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{3} = 0 \\ \frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{9}{3}}{-2} = \frac{z-2}{\frac{1}{3}} = t \Rightarrow x=t-1, y=-2t+\frac{9}{3}, z=2t+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 + (-2t+\frac{9}{3})^2 + (2t+2)^2 + 2(t-1) -$$

$$9(-2t+\frac{9}{3}) - 4(2t+2) + \frac{25}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 = \frac{51}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{51}{36} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{51}}{6}$$

$$\Rightarrow M_1(\frac{\sqrt{51}}{6} - 1, -\frac{\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{3}, \frac{\sqrt{51}}{3} + 2)$$

$$M_2(-\frac{\sqrt{51}}{6} - 1, \frac{\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{3}, -\frac{\sqrt{51}}{3} + 2)$$

مثال ۶: دو نقطه $A(-1, 2, 1)$ و $B(3, -1, 1)$ در دستگاه

مختصات $O-xyz$ داده شده‌اند. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه xOy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۲ است.

حل: معادله مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن، با صفحه xOy به معادله $z=0$ را به دست می‌آوریم:

$$A(-1, 2, 1) \text{ و } B(3, -1, 1) \text{ و } M(x, y, z), k=2 \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

تقریر اندریشه

همه مقادیر x را چنان بیابید که به ازای آنها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z = [-x + 10 + (x+2)i] (x-i)$$

جواب: ۲ و -۵

حل: اول، z را به صورت $a+bi$ می‌نویسیم. درثانی، برای حقیقی بودن z، باید b برابر صفر باشد؛ بنابراین جميع مقادیر برقرار کننده این شرط را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} z &= [-x + 10 + (x+2)i] (x-i) \\ &= -x^2 + 10x + (x^2 + 2x)i + xi - 10i + (x+2) \\ &= (-x^2 + 10x + x + 2) + (x^2 + 2x + x - 10)i \\ &= (-x^2 + 11x + 2) + (x^2 + 3x - 10)i \end{aligned}$$

برای حقیقی بودن z، باید جزء موهومی آن برابر صفر باشد:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x-2)(x+5) = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -5$$

یا