

دایره آپولونیوس

(۲۴)

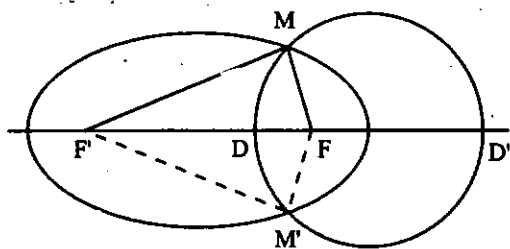
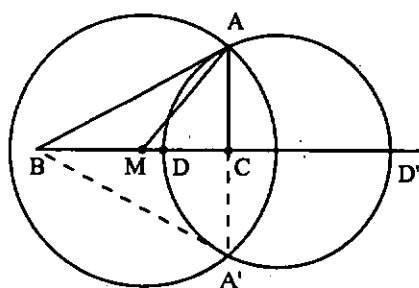
مکان هندسی

● محمد هاشم رستمی

مثال (۴): از مثلث ABC اندازه ضلع $BC = a$ و طول میانه رأس $A (m_a)$ معلوم است؛ مثلث را رسم کنید.

مثال (۵): یک بیضی به کانون های F و F' و عدد ثابت $2a$ در صفحه P داده شده است. نقطه ای از این بیضی را تعیین کنید که نسبت فاصله اش از دو کانون F و F' برابر $2a$ باشد.

حل: ابتدا پاره خط BC را به طول a رسم می کنیم.



حل: می دانیم مکان هندسی نقطه ای از صفحه که نسبت فاصله اش از دو نقطه ثابت F و F' برابر مقدار ثابت $2a$ است، دایره ای است که قطرش پاره خط FF' را به نسبت $2a$ تقسیم می کند. این دایره (دایره به قطر DD') را رسم می کنیم. نقطه های برخورد این دایره با بیضی داده شده، جواب مسأله اند. $\left(\frac{DF'}{DF} = \frac{D'F'}{D'F} = 2a\right)$

چون $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = k$ است، پس مکان هندسی رأس A ، دایره ای است که قطرش پاره خط BC را به نسبت k تقسیم می کند. با مشخص کردن نقطه های D و D' که پاره خط BC را به نسبت $\frac{b}{c} = k$ تقسیم می کند، دایره ای به قطر DD' را رسم می کنیم. از طرفی $AM = m_a$ معلوم است؛ پس مکان هندسی دیگر رأس A ، دایره ای به مرکز نقطه M وسط پاره خط BC و به شعاع m_a است. این دایره را نیز رسم می کنیم. نقطه برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می کنیم تا

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - \frac{27}{4}y + \frac{65}{8} = 0 \\ y = 4x - 4 \Rightarrow x^2 + (4x - 4)^2 - x - \frac{27}{4}(4x - 4) + \frac{65}{8} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 60x + \frac{409}{8} = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{+30 \pm \sqrt{247}}{17} \Rightarrow y_1, y_2 = \frac{120 \pm 4\sqrt{247}}{17} - 4$$

$$M_1 \left(\frac{30 + \sqrt{247}}{17}, \frac{52 + 4\sqrt{247}}{17} \right) \text{ و}$$

$$M_2 \left(\frac{30 - \sqrt{247}}{17}, \frac{52 - 4\sqrt{247}}{17} \right) \text{ نقطه‌های جواب مسأله}$$

مثال (۸): سه نقطه $A(2, -1)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(-4, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه مختصات را تعیین کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و نسبت فاصله‌اش از دو نقطه B و C برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: نقطه برخورد عمودمنصف پاره خط AB با دایره آپولونیوسی که قطرش پاره خط BC را به نسبت $\sqrt{2}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین، معادله این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطه برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

و $M(0, 1)$ وسط AB و $A(2, -1)$ و $B(-2, 3)$

$$\frac{m}{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{m}{AB} = \frac{3 + 1}{-2 - 2} = -1 \Rightarrow AB \text{ عمودمنصف}$$

$$m = +1 \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1 \quad AB \text{ عمودمنصف پاره خط}$$

$$B(-2, 3) \text{ و } C(-4, 0) \text{ و } M(x, y) \text{ و } k = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \text{ و } MC = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$\frac{MB}{MC} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}}{\sqrt{(x+4)^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+4)^2 + 2y^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 12x + 6y + 19 = 0 \quad \text{معادله دایره آپولونیوس}$$

مثال (۶): دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر $\frac{1}{3}$ باشد.

حل: فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر $\frac{1}{3}$ است؛ در این صورت داریم:

$$A(-1, 2) \text{ و } B(3, 0) \text{ و } M(x, y) \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \text{ و } MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \Rightarrow 2(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 14x - 16y + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{14}{2}x - \frac{16}{2}y + \frac{11}{2} = 0$$

معادله دایره آپولونیوس

مثال (۷): خط $D: y - 4x + 4 = 0$ و دو نقطه $A(-4, 0)$ و

$B(0, 3)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۳ باشد.

حل: معادله دایره آپولونیوس - یعنی دایره‌ای که قطرش پاره خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند - را می‌نویسیم و نقطه برخورد آن با خط D را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد. خواهیم داشت:

$$A(-4, 0) \text{ و } B(0, 3) \text{ و } M(x, y) \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}, MB = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+4)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 3$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 9(y-3)^2$$

$$= (x+4)^2 + y^2 \Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 8x - 54y + 65 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{27}{4}y + \frac{65}{8} = 0 \quad \text{معادله دایره آپولونیوس}$$

$$O' \text{ وسط پاره خط } EF \left| \begin{array}{l} x = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$R = O'E = O'F = a\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}a = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{شعاع دایره به قطر } EF$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad \text{معادله دایره به قطر } EF$$

پ) دو نقطه E و F پاره خط AA' را به نسبت $3 - 2\sqrt{2}$ تقسیم می کنند؛ زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{EA}{EA'} = \frac{c-a}{c+a} = \frac{a\sqrt{2}-a}{a\sqrt{2}+a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه ای از این صفحه مختصات که نسبت فاصله اش از دو نقطه A و A' برابر $3 - 2\sqrt{2}$ است، دایره به قطر EF است. لذا نقطه برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4 \\ \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2 - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3\sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = -4 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

نقطه های جواب مسأله



$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 + 12x + 6y + 19 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+1)^2 + 12x + 6(x+1) + 19 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 20x + 26 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 13 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = -5 \pm 2\sqrt{3} \text{ و } y_1, y_2 = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow M_1(-5 + 2\sqrt{3}, -4 + 2\sqrt{3}) \text{ و}$$

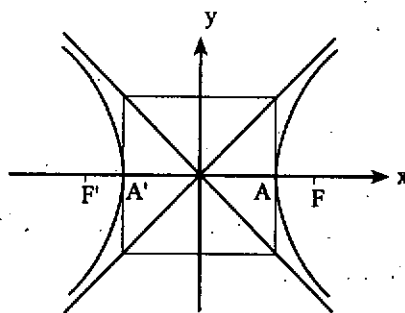
$$M_2(-5 - 2\sqrt{3}, -4 - 2\sqrt{3}) \quad \text{نقطه های جواب مسأله}$$

مثال (۹): هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 4$ داده شده است.

الف) این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز، رأس ها و کانون های آن را بیابید.

ب) مختصات نقطه E مزدوج توافقی نقطه F نسبت به دو رأس A و A' را بیابید و معادله دایره به قطر EF را بنویسید.

پ) نقطه ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله اش از دو نقطه A و A' برابر $3 - 2\sqrt{2}$ باشد.



$$x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{حل: الف)}$$

$$\Rightarrow \text{O مرکز هذلولی} ; a^2 = b^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$A(2, 0) \text{ و } A'(-2, 0) \text{ و } F(2\sqrt{2}, 0) \text{ و } F'(-2\sqrt{2}, 0)$$

ب) بنا به رابطه نیوتن در تقسیم توافقی داریم:

$$\overline{OE} \cdot \overline{OF} = \overline{OA'}^2 \Rightarrow \overline{OE} \times c = a^2 \Rightarrow \overline{OE} = \frac{a^2}{c}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow E \left| \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \right.$$