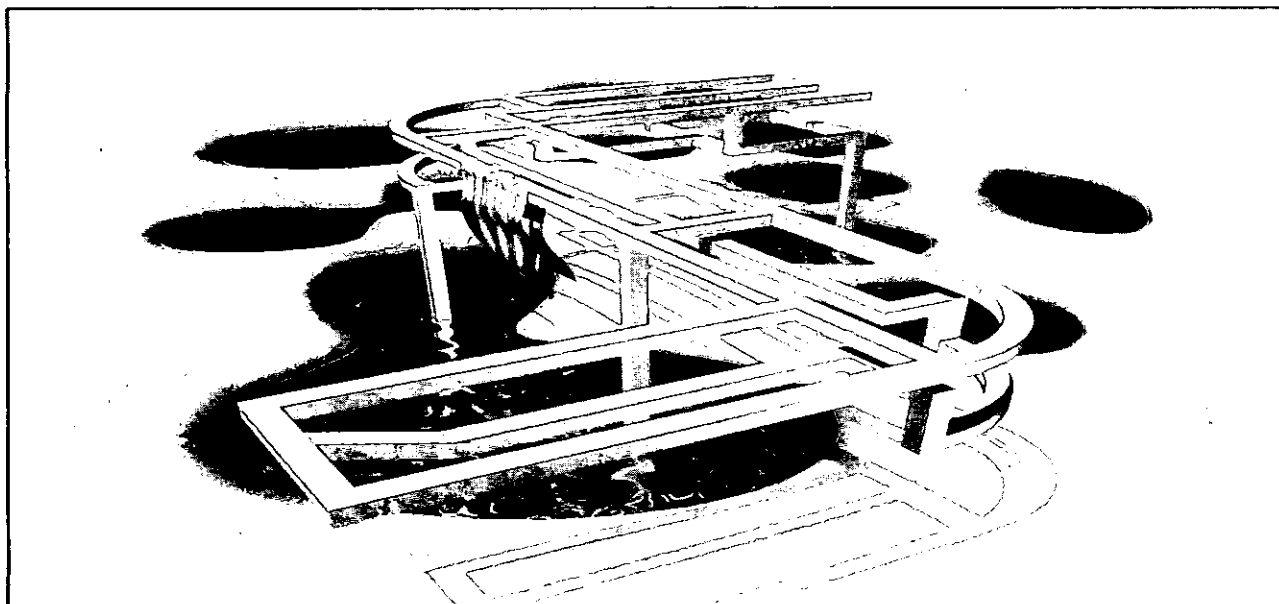
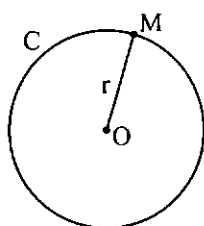




در این مقاله، به طور مختصر تصمیم داریم شما را با روشی از روشهای حل مسأله آشنا کنیم، که توسط آن، شما می توانید بسیاری از مسائل ترسیمی هندسه خود را با کمی دقت و موشکافی، حل کنید.

یکی از مفاهیمی که در هندسه دوره متوسطه با آن آشنا می شوید، مفهوم مکان هندسی است. فرض کنید A مجموعه ای از نقاط باشد و P یک ویژگی و خاصیت معین باشد. مجموعه A را یک مکان هندسی می گوئیم؛ هرگاه دو شرط ذیل برقرار باشد:

- I. هر نقطه در A خاصیت P دارد.
 - II. هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعه A است.
- برای درک بهتر تعریف فوق، به مثالهای زیر توجه کنید:
- مثال (۱): فرض کنید C مجموعه نقاط روی دایره شکل (۱) باشد و P این ویژگی باشد که «فاصله نقطه دلخواه M از نقطه ثابت O برابر عدد ثابت r است.» با شناختی که شما عزیزان از مفهوم دایره دارید، می دانید که:



شکل ۱

مکان هندسی و روش دو مکان هندسی در حل مسائل ترسیمی

• علیرضا عین اللهی

فرض کنید H مجموعه نقاط روی این نیمخط باشد و P این خاصیت باشد که «فاصله نقطه M از دو نیمخط ثابت Ox و Oy برابرند». با توجه به شناختی که شما دانش آموزان عزیز از خواص مربوط به نیمساز یک زاویه دارید، دیده می شود:

I. فاصله هر نقطه روی نیمساز Oz از دو نیمخط Ox و Oy برابرند؛ یعنی هر نقطه از مجموعه H خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که فاصله اش از دو نیمخط Ox و Oy برابر باشد، روی نیمساز Oz قرار دارد؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعه H قرار دارد.

بنابراین، مجموعه H ، یعنی نیمساز زاویه xOy ، یک مکان هندسی است. ▲

برای این که با مفهوم مکان هندسی، بیشتر و بهتر آشنا شوید، مکانهای هندسی خواسته شده در تمرینهای زیر را به دست آورید و مشابه آنچه در مثالهای بالا ذکر شد، درستی گفته خود را ثابت کنید:

تمرین (۱): مکان هندسی نقاطی که از یک خط مفروض و ثابت، به فاصله مفروض و ثابت باشند.

تمرین (۲): مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی مفروض و ثابت، به یک فاصله اند.

تمرین (۳): از مثلثی، دو رأس A و B و زاویه α ، روبه رو به ضلع AB ، معلوم می باشد. مکان هندسی رأس سوم این مثلث را پیدا کنید.

اولین قدم در ورود به یک مسأله، «فهمیدن مسأله» است. برای فهم یک مسأله، کافی است سه قسمت زیر از آن بدقت مشخص شود:

- I. مجهول یا مجهولها (آنچه را که باید در مسأله پیدا کنید).
- II. داده یا داده ها (آنچه که در مسأله برای شما مشخص است).
- III. شرط (آنچه که مجهول را با داده ها، به طور مشخص، مربوط می سازد). برای درک بهتر مطالب اخیر، به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۴): مسأله زیر را در نظر بگیرید:

«دایره ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک دایره است.

II. داده ها کدامند؟

جواب: مثلث مفروض ABC .

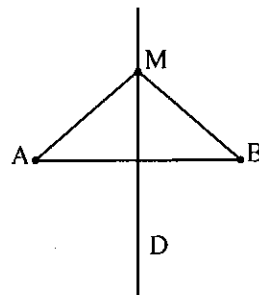
III. شرط چیست؟

I. فاصله هر نقطه M از دایره شکل (۱) تا نقطه O (مرکز دایره) برابر مقدار ثابت r است؛ یعنی هر نقطه از مجموعه C دارای خاصیت P است.

II. اگر فاصله نقطه M از نقطه O برابر مقدار ثابت r باشد، در این صورت، M روی دایره شکل (۱) قرار دارد؛ یعنی هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعه C است.

بنابراین، می توانید بگویید مجموعه C ، یعنی دایره ای به مرکز O و شعاع r ، یک مکان هندسی می باشد. ▲

مثال (۲): به احتمال زیاد همه شما با مفهوم عمود منصف یک پاره خط آشنا هستید. حال فرض کنید که D مجموعه نقاط خط مشخص شده در شکل (۲) باشد و P این خاصیت باشد که «فاصله نقطه M از دو نقطه ثابت A و B برابر است». در این صورت شما می دانید که:



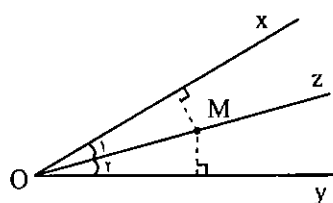
شکل ۲

I. هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر این پاره خط، به یک فاصله اند؛ یعنی هر نقطه در مجموعه D خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن قرار می گیرد؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعه D قرار دارد.

پس بنابه تعریف مکان هندسی، مجموعه D ، یعنی عمود منصف پاره خط AB ، یک مکان هندسی است. ▲

مثال (۳): در شکل (۳) نیمخط Oz نیمساز زاویه xOy است.



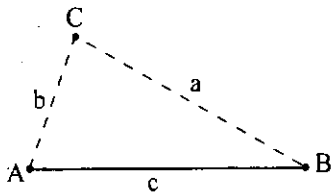
شکل ۳

این صورت، فاصله O از رئوس مثلث برابر است. بنابراین، مسأله را می‌توانید به مسأله‌ای تبدیل کنید که در آن:

مجهول: یافتن نقطه O است.

شرط: (۱) $AO = BO$ و (۲) $AO = CO$.

مثال (۸): در مثال (۵) اگر یکی از اضلاع معلوم را مطابق شکل (۵) رسم کنید، دو رأس مثلث خواسته شده، مشخص می‌شود



شکل ۵

(مانند رئوس A و B)، سپس مسأله تبدیل به یافتن رأس C مثلث می‌شود؛ اما چون دو ضلع دیگر مثلث نیز معلوم است، پس فاصله A تا C و همچنین فاصله C تا B مشخص می‌باشد. بنابراین داریم:

مجهول: یافتن نقطه C است.

شرط: (۱) فاصله C از A برابر مقدار معلوم b است.

(۲) فاصله C از B برابر مقدار معلوم a است.

مثال (۹): آیا می‌توانید دومین قدم روش دو مکان هندسی را

برای مثال (۶) بیان کنید؟

آخرین قدم برای حل مسأله به روش دو مکان هندسی چیست؟ اگر کمی به اجزای شرط در دو مثال (۷) و (۸) دقت کنید، خواهید دید که هر جزء یک مکان هندسی برای نقطه‌ای می‌باشد که در مجهول خواسته شده است، لذا نقطه مجهول در مسأله محل برخورد این دو مکان هندسی در شرط می‌باشد. برای درک بهتر آن، به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱۰): دایره‌ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.

حل: بر طبق توضیحات مثال (۴) داریم:

مجهول: یک دایره.

داده‌ها: مثلث مفروض ABC .

شرط: دایره خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.

از این جا مطابق با توضیحات مثال (۷) داریم:

مجهول: یک نقطه O .

شرط: (۱) $AO = BO$

(۲) $AO = CO$

جواب: دایره خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.

مثال (۵): به مسأله زیر توجه کنید:

«مثلی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: سه پاره خط.

III. شرط چیست؟

جواب: پاره خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده

است.

مثال (۶): مثلی با معلوم بودن دو ضلع و میانه وارد بر یکی از

این اضلاع را رسم کنید.

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: سه پاره خط.

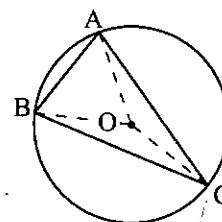
III. شرط چیست؟

جواب: دو پاره خط از سه پاره خط داده شده، اضلاع و دیگری

میانه مثلث خواسته شده است.

دومین قدم در حل مسأله، به روش دو مکان هندسی، تبدیل مسأله داده شده به یک مسأله هم‌ارز با آن می‌باشد، که در آن، مجهول تنها یافتن یک نقطه است و شرط از دو جزء تشکیل یافته است. به عبارت دیگر، باید مسأله‌تان را چنان تغییر دهید که اول، در اصل مسأله خدشه‌ای وارد نشود، دوم، در مجهول فقط یافتن یک نقطه مطرح شود و سوم، شرط به دو قسمت مجزا، که ارتباط بین داده‌های مختلف و مجهول است، تفکیک شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۷): یک بار دیگر به مثال (۴) توجه کنید. همان‌طور که در شکل (۴) می‌بینید، اگر O مرکز دایره خواسته شده باشد، در



شکل ۴

مجهول: یک نقطه A . (چرا؟)

شرط: (۱) فاصله A تا نقطه معلوم C برابر b است؛ یعنی $AC = b$.
(۲) فاصله A تا نقطه معلوم M برابر m_a است؛ یعنی $AM = a$. (چرا؟)

پس نقطه A محل برخورد دو مکان هندسی است، که این مکانها برتیب، دو دایره یکی به مرکز C و شعاع b ، و دیگری به مرکز M و شعاع m_a می باشد. (چرا؟) ▲

در انتها با حل تمرینهای ذیل، شما می توانید مهارت لازم در حل مسائل ترسیمی هندسه به روش دو مکان هندسی را کسب نمایید.

تمرین (۱): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و m_a (میانه وارد بر ضلع a)، مثلث را رسم کنید.
تمرین (۲): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و α (زاویه روبه رو به ضلع a)، مثلث را رسم کنید.
تمرین (۳): با معلوم بودن سه خط راست، دایره ای رسم کنید که بر دو خط مماس باشد و مرکزش روی خط سوم قرار گیرد.
تمرین (۴): در داخل مثلث، نقطه ای پیدا کنید که از آن جا، هر سه ضلع مثلث، به یک زاویه دیده شود.

● منبع برای مطالعه بیشتر

خلافت ریاضی: تألیف جورج بولیا، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی.



از جزء (۱) شرط دیده می شود که نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می شود که نقطه O روی عمود منصف پاره خط AC است. (مثال (۲) را ببینید.)

بنابراین برای پایان حل آن، کافی است عمود منصف پاره خطهای AB و AC را رسم کنید؛ محل برخورد این دو عمود منصف، نقطه O را می دهد. ▲

مثال (۱۱): مثلی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.

حل: در مثال (۵) دیدید که:

مجهول: یک مثلث.

داده ها: سه پاره خط.

شرط: پاره خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده است. بر مبنای توضیحات مثال (۸) دیدید که:

مجهول: یک نقطه C .

شرط: (۱) $AC = b$.

(۲) $BC = a$.

از جزء (۱) شرط دیده می شود که C روی دایره ای به مرکز A به شعاع b است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می شود که C روی دایره ای به مرکز B به شعاع a است (مثال (۱) را ببینید).

در نتیجه، برای کامل شدن حل آن، کافی است دو دایره، یکی به مرکز A به شعاع b و دیگری به مرکز B به شعاع a رسم کنید. محل برخورد این دو دایره، نقطه C را می دهد. ▲

مثال (۱۲): مثلی با معلوم بودن دو ضلع و میانه وارد بر یکی از این اضلاع را رسم کنید.

حل: بر اساس مثال (۶) داریم:

مجهول: یک مثلث.

داده ها: سه پاره خط.

شرط: دو پاره خط از سه پاره خط داده شده اضلاع و دیگری میانه مثلث خواسته شده است.

مطابق شکل، اگر دو ضلع a و b و میانه m_a معلوم باشد، در این صورت داریم:

