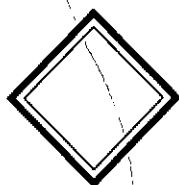


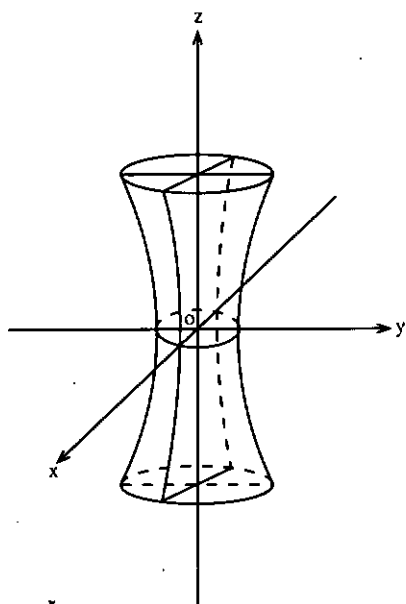
مکان هندسی

(قسمت بیست و یکم)



هذلولوی

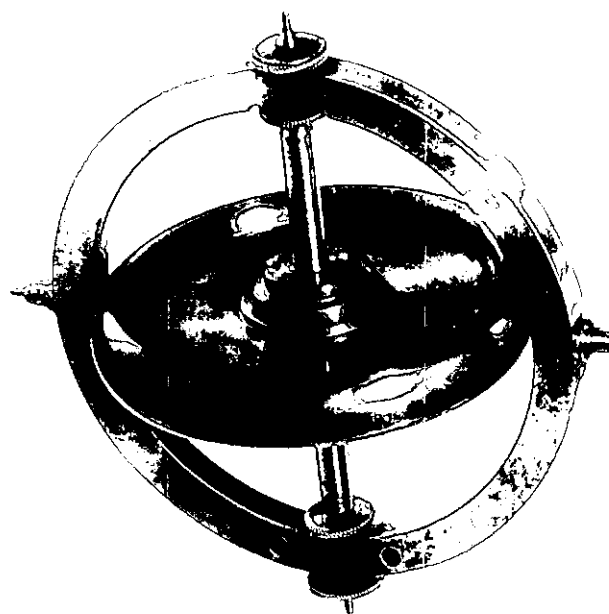
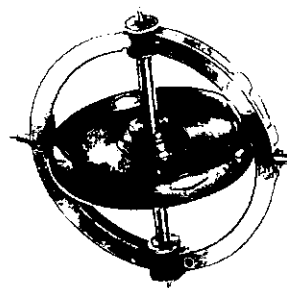
هذلولوی یکپارچه. هرگاه در معادله کلی رویه های درجه دوم که به صورت $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$ است، ضریبهای A, B, C و L مخالف صفر، با A و B همعلامت و با C مختلف علامه باشد، با فرض $\frac{-L}{A} = a^2$ ، $\frac{-L}{B} = b^2$ و $\frac{-L}{C} = c^2$ داریم:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

این معادله، رویه ای درجه دوم را مشخص می کند که هذلولوی یکپارچه یا هذلولوی وار یکپارچه یا هذلولیگون یکپارچه نامیده می شود. این رویه، ویژگیهای زیر را دارد:

۱. صفحه های مختصات، صفحه های تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است.



این معادله، رویه‌ای درجه دوم را مشخص می‌کند که هذلولوی دوبارچه یا هذلولوی واردوبارچه یا هذلولیگون دوبارچه نامیده می‌شود. این رویه ویژگیهای زیر را دارد:

۱. صفحه‌های مختصات، صفحه تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

۲. صفحه xOy را قطع نمی‌کند. مقطع آن با دو صفحه yOz

و xOz به ترتیب هذلولیهای به معادله $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ است.

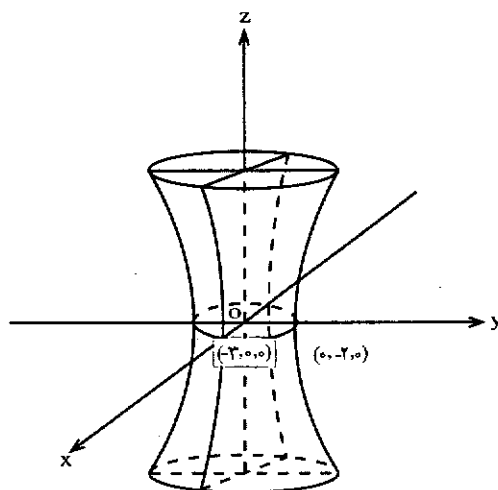
۳. اگر آن را با صفحه $z = h$ قطع دهیم، با شرط $|h| > c$

بیضیهایی به معادله‌های
$$\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1$$

به دست می‌آید. اگر h تغییر کند، بیضیهایی به دست آمده متشابه‌اند.

مثال ۱. رویه به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن را رسم کنید.

حل. این رویه نسبت به هریک از صفحه‌های مختصات و همچنین مبدأ مختصات متقارن است. محور x ها را در نقطه‌های $A(3, 0, 0)$ و $A'(-3, 0, 0)$ و محور y ها را در نقطه‌های $B(0, 2, 0)$ و $B'(0, -2, 0)$ قطع می‌کند. این رویه با محور z ها نقطه برخورد



۲. فصل مشترک آن با صفحه xOy ، بیضی به معادله

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{و با صفحه } yOz \text{ هذلولی به معادله } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

و با صفحه xOz ، هذلولی به معادله $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ است.

۳. اگر آن را با صفحه $z = h$ قطع دهیم، بیضی به معادله زیر

به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

نیمه قطرهای این بیضی $b_1 = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ و $a_1 = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$

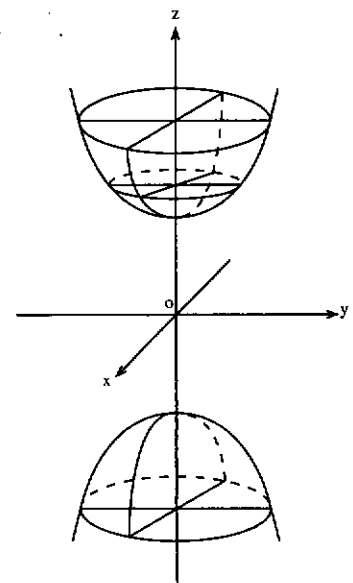
است.

این بیضی به ازاء جميع مقدارهای h وجود دارد و بعلاوه از رابطه $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ دیده می‌شود که تمام بیضیهایی متشابه‌اند و کوچکترین آنها وقتی به دست می‌آید که هذلولوی را با صفحه $z = 0$ قطع دهیم. هذلولوی دوبارچه. اگر در معادله کلی رویه‌های درجه دوم

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$$

ضریبهای A, B, C و L مخالف صفر، $-L$ با A و B مختلف‌العلامه و با C هم‌علامت باشد، با فرض $\frac{-L}{C} = c^2$ و $\frac{L}{B} = b^2$ ، $\frac{L}{A} = a^2$ داریم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



$$a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, \quad b^2 = 12, \quad b = 2\sqrt{3},$$

$$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \quad \text{محور کانونی موازی محور } x \text{ هاست.}$$

مثال ۴. معادله هذلولی وار دوبارچه ای را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محورهای تقارنش، محورهای مختصات باشند و از نقطه های $(2, \sqrt{11}, 3)$ ، $(3, 1, 2)$ و $(6, 2, \sqrt{15})$ می گذرد.

حل. معادله هذلولی وار دوبارچه را که محور کانونی اش، در امتداد محور z هاست، می نویسیم. این معادله به صورت کلی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

نقطه های داده شده، در این معادله باید صدق کنند. بنابراین داریم:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{c^2} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{4}{a^2} + \frac{11}{b^2} - \frac{9}{c^2} = -1 \quad (2)$$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} - \frac{15}{c^2} = -1 \quad (3)$$

از رابطه های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می شود:

$$a^2 = 1, \quad b^2 = \frac{1}{2}, \quad c^2 = \frac{1}{3}$$

و از آن جا معادله هذلولی وار دوبارچه به صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{3}} = -1 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -1$$

$$3z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$$

مثال ۵. صفحه $z+1=0$ هذلولوی یک پارچه به معادله $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ را در یک هذلولی قطع می کند. معادله این هذلولی، نیمه قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ z+1=0 \Rightarrow z=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

ندارد. فصل مشترک آن با صفحه های $z=k$ بیضیهایی هستند که مرکزشان روی محور z ها واقع است و وقتی k زیاد شود، این بیضیا نیز بزرگتر می شوند.

مقطعهای این رویه با صفحه هایی موازی با صفحه های yOz و xOz هذلولی هستند. این رویه، هذلولی وار یکپارچه است.

مثال ۲. مختصات مرکز و نیمه قطره های هذلولوی یکپارچه به معادله

$$2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$$

را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2 - 4x) - 3(y^2 + 2y) + 4(z^2 + 3z) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2[(x-2)^2 - 4] - 3[(y+1)^2 - 1] +$$

$$4[(z+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 - 3(y+1)^2 + 4(z+\frac{3}{2})^2 = 24$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{8} + \frac{(z+\frac{3}{2})^2}{6} = 1$$

$$\Rightarrow O'(2, -1, -\frac{3}{2}) \quad \text{مرکز}$$

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

محور کانونی این هذلولوی موازی محور y هاست.

مثال ۳. مختصات مرکز و نیمه قطره های هذلولی وار دوبارچه به معادله $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2 - 6x) - 3(y^2 + 2y) - 4z^2 - 21 = 0$$

$$\Rightarrow 2[(x-3)^2 - 9] - 3[(y+1)^2 - 1] - 4z^2 - 21 = 0$$

$$2(x-3)^2 - 3(y+1)^2 - 4z^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{18} - \frac{(y+1)^2}{12} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow O'(3, -1, 0)$$

را تعیین کنید.

حل. ۱. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$b_1^2 = 4, b_1 = 2, A(0, 0, 5), A'(0, 0, -5)$$

۲. دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{9y^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$$

$$3y^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{مقطع یک هذلولی است.}$$

مثال ۸. به ازای چه مقداری از m ، صفحه به معادله

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad x + mz - 1 = 0$$

را اولاً در یک بیضی، ثانیاً در یک هذلولی قطع می‌کند.

حل. داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ x + mz - 1 = 0 \Rightarrow x = -mz + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-mz + 1)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

$$\Rightarrow m^2 z^2 + 1 - 2mz + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$(m^2 - 1)z^2 + y^2 - 2mz + 2 = 0$$

اولاً. برای آن که مقطع بیضی باشد، باید $m^2 - 1 > 0$ باشد؛

یعنی $m > +1$ و یا $m < -1$ باشد.

ثانیاً. برای آن که مقطع هذلولی باشد، باید $m^2 - 1 < 0$ ؛ یعنی

$-1 < m < +1$ باشد.

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$y = 0 \Rightarrow x = +4, x = -4$$

$$\Rightarrow A(4, 0, -1), A'(-4, 0, -1)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{مثال ۶. هذلولی وار یکپارچه به معادله}$$

داده شده است:

۱. نیمه قطرها و مختصات رأسهای مقطع این هذلولی وار با

صفحه xOy را تعیین کنید.

۲. نشان دهید که صفحه $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ این

هذلولی وار را در خط مستقیمی قطع می‌کند.

حل. ۱. مقطع این هذلولی وار با صفحه xOy یک بیضی است.

داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 0$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 25 \Rightarrow a_1 = 5, b_1^2 = 16 \Rightarrow b_1 = 4,$$

$O(0, 0)$ مرکز بیضی

$$A(5, 0, 0), A'(-5, 0, 0), B(0, 4, 0), B'(0, -4, 0)$$

۲. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ 4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{5(y + 2z + 4)}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{25(y + 2z + 4)^2}{16 \times 25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 + 2yz + 4y + 4z = 0 \Rightarrow y(y + 2z) + 4(y + 2z) = 0$$

$$\Rightarrow (y + 2z)(y + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{معادله خط فصل مشترک}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \quad \text{مثال ۷. هذلولی وار دوبارچه به معادله}$$

داده شده است.

۱. معادله مقطع این هذلولی وار با صفحه yOz را به دست

آورید. نیمه قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

۲. معادله فصل مشترک این هذلولی وار با صفحه $x - 3y = 0$