

مکان هندسی

(قسمت پنجم)

محمد هاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحب‌نظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجله ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

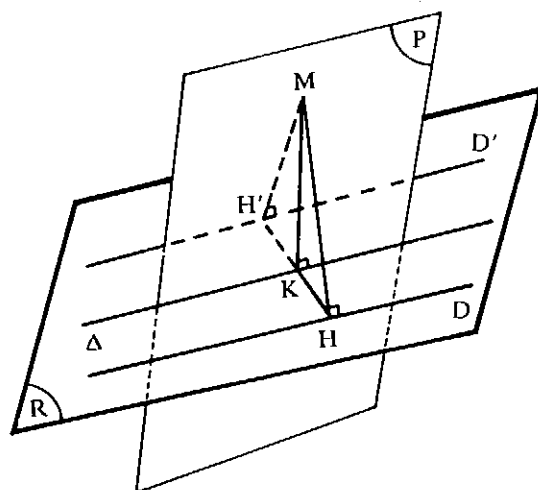
صفحه R عمود باشد. این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله می‌باشد؛ زیرا:
اولاً: هر نقطه دلخواه مانند M از این صفحه، از دو خط D و D' به یک فاصله است چون اگر از M عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر خطهای D و D' فرود آوریم، صفحه HMH' بر خط Δ نیز عمود است و این خط را در نقطه K وسط پاره خط HH' قطع می‌کند. در مثلث MHH' خط MK عمود منصف HH' می‌باشد، بنابراین این مثلث متساوی‌الساقین است یعنی: $MH = MH'$ است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد، روی صفحه P واقع است. زیرا از متساوی‌الساقین بودن مثلث HMH' و میانه بودن MK نتیجه می‌شود که MK عمود منصف HH' است و چون MK عمود بر Δ نیز می‌باشد (Δ بر دو خط متقاطع MH و MH' از صفحه HMH' عمود است، پس بر این صفحه و در نتیجه بر MK عمود می‌باشد)، بنابراین نقطه M روی صفحه‌ای قرار دارد که بر خط Δ می‌گذرد و بر صفحه R عمود است، یعنی نقطه M روی صفحه P واقع است.

اثبات به روش تحلیلی - دو خط متوازی D و D' به معادله‌های:

$$D: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

۶- مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله است، صفحه‌ای است عمود بر صفحه دو خط D و D' ، که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط واقع در صفحه آنها (خط Δ) می‌گذرد.



اثبات به روش هندسی - بر دو خط متوازی D و D' صفحه R را می‌گذرانیم و خط Δ را به یک فاصله از D و D' در این صفحه رسم می‌کنیم. آنگاه صفحه P را چنان بر خط Δ مرور می‌دهیم که بر

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\vec{A_1 M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{|\vec{A_r M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\vec{A_1 M} \wedge \vec{V}|^2 = |\vec{A_r M} \wedge \vec{V}|^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & [q(z - z_1) - r(y - y_1)]^2 + [r(x - x_1) - p(z - z_1)]^2 \\ & + [p(y - y_1) - q(x - x_1)]^2 \\ & = [q(z - z_r) - r(y - y_r)]^2 + [r(x - x_r) - p(z - z_r)]^2 \\ & + [p(y - y_r) - q(x - x_r)]^2 \end{aligned}$$

پس از انجام محاسبات لازم و ساده کردن، معادله صفحه‌ای به صورت $Ax + By + Cz + D = 0$ به دست می‌آید که در آن A و B و C و D

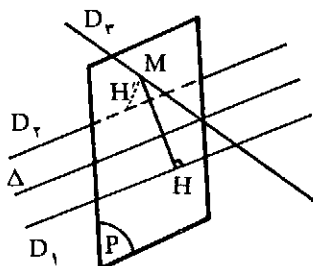
$$A = 2[pr(z_1 - z_r) + pq(y_1 - y_r) - (p^2 + q^2)(x_1 - x_r)]$$

و ...

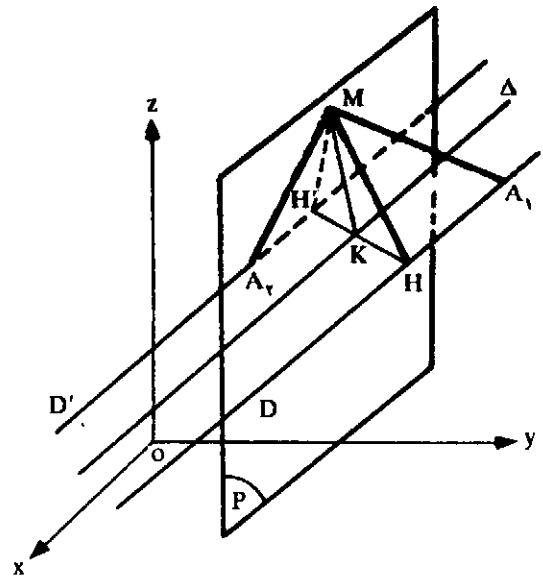
ثابت می‌شود که این صفحه بر صفحه R عمود و شامل خط Δ است. و بالعکس می‌توان ثابت کرد هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله این صفحه صدق کند، از دو خط D و D' به یک فاصله است. بنابراین مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی در فضا صفحه‌ای است عمود بر صفحه آن دو خط موازی، که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط در آن صفحه می‌گذرد.

مثال ۱: دو خط متوازی D_1 و D_2 و خط D_3 غیرموازی با آنها مفروض است. نقطه‌ای روی خط D_3 بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشد. (به جای خط D_3 می‌تواند یک شکل دیگر مانند یک صفحه یا ... باشد).

حل: صفحه P مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از دو خط D_1 و D_2 را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع این صفحه با خط D_3 جواب مسأله است، و به تعداد نقاط تلاقی، مسأله جواب دارد. (یک، هیچ یا بی‌شمار نقطه جواب مسأله است بنابراین خط D_3 به ترتیب، متقاطع یا موازی با صفحه P و یا روی صفحه P باشد).



$$D': \frac{x - x_r}{p} = \frac{y - y_r}{q} = \frac{z - z_r}{r}$$



را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت اگر $A_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطه‌ای از خط D و $A_r(x_r, y_r, z_r)$ نقطه‌ای واقع بر خط D' باشد و از نقطه M عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر خطهای D و D' فرود آوریم، داریم:

$$\vec{V} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, A_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, A_r \begin{vmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{A_1 M} \begin{vmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{vmatrix}, \vec{A_r M} \begin{vmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ z - z_r \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V} \wedge \vec{A_1 M} \begin{vmatrix} -q(z - z_1) + r(y - y_1) \\ -r(x - x_1) + p(z - z_1) \\ -p(y - y_1) + q(x - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} \wedge \vec{A_r M} \begin{vmatrix} -q(z - z_r) + r(y - y_r) \\ -r(x - x_r) + p(z - z_r) \\ -p(y - y_r) + q(x - x_r) \end{vmatrix}$$

این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کره است که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله است.

ثانیاً - نقطه تقاطع دو دایره $C(O \text{ و } R)$ و $C'(O' \text{ و } \frac{R\sqrt{3}}{2})$ جواب است (دو نقطه) یعنی تنها دو نقطه روی کره وجود دارد که هم در صفحه Q واقع‌اند و هم از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند (باید توجه داشت که این دو نقطه همان نقاط تقاطع خط Δ با کره مفروض می‌باشند).

ثالثاً - در صورتی که خط D' در صفحه $(O \text{ و } D)$ قرار نداشته باشد وجود جواب بستگی به آن دارد که کره $(O \text{ و } R)$ صفحه P را قطع کند و یا مماس بر آن باشد و یا آن را قطع نکند، و این مطلب نیز با مقایسه شعاع کره با فاصله مرکز کره از صفحه P مشخص می‌شود.

مثال ۳: دو خط متوازی $D : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ و D'

$$D' : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad \text{مفروض‌اند. معادله مکان هندسی نقطه}$$

متساوی‌الفاصله از این دو خط را به دست آورید.

حل: معادله کانونیک خط D' را مشخص می‌سازیم داریم:

$$D' : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

بردار هادی این دو خط $(-1, 2, 3)$ و $\vec{V}$ است. برای پیدا کردن معادله مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از دو خط D و D' ؛ فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از این مکان باشد، در این صورت با اختیار کردن نقطه A_1 روی خط D و نقطه A_2 روی خط D' داریم:

$$A_1 \in D (x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 2) \text{ و}$$

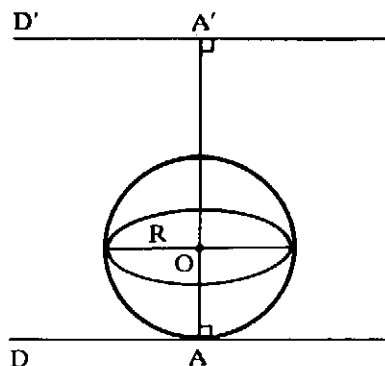
$$A_2 \in D' (x_2 = -1, y_2 = 0, z_2 = 4)$$

$$\Rightarrow \vec{A_1M}(x, y, z-2) \text{ و } \vec{A_2M}(x+1, y, z-4) \text{ و}$$

$$\vec{V}(2, 3, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{A_1M} \wedge \vec{V} (-3z-y+6 \text{ و } x+2z-4 \text{ و } -2y+3x)$$

مثال ۴: کره $(O \text{ و } R)$ و خط D مماس بر آن و خط D' موازی خط D و به فاصله $2R$ از آن واقع در صفحه $(O \text{ و } D)$ مفروض‌اند.



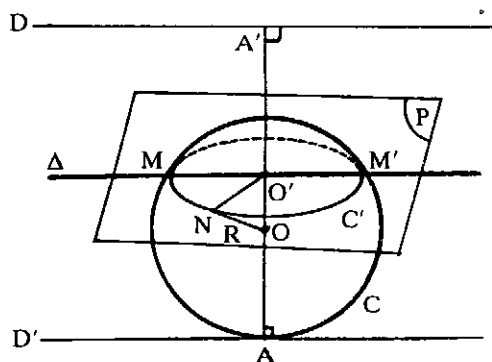
اولاً - مکان هندسی نقطه‌ای از این کره را بیابید که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله است.

ثانیاً - چند نقطه روی کره فوق وجود دارد که در صفحه دو خط D و D' واقع‌اند و از دو خط D و D' نیز به یک فاصله‌اند؟

ثالثاً - اگر خط D' در صفحه $(O \text{ و } D)$ قرار نداشته باشد، مسأله به چه صورت درمی‌آید.

حل: نقطه تماس خط D با کره را A می‌نامیم و بر دو خط متوازی D و D' صفحه Q را می‌گذرانیم. این صفحه، کره $(O \text{ و } R)$ را در دایره عظیمه‌ای که از نقطه A می‌گذرد قطع می‌کند که آن را دایره $C(O \text{ و } R)$ می‌نامیم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی D و D' صفحه‌ای مانند P است که بر صفحه Q عمود است و بر خط Δ که به فاصله $\frac{2R}{2}$ از هر یک از خطوط D و D' در صفحه Q قرار دارد، می‌گذرد. این صفحه کره را در دایره‌ای به مرکز O' قطع می‌کند به قسمی که $OO' = \frac{R}{2}$ (نقطه تقاطع AO با صفحه P است) و شعاع آن برابر است با:

$$R' = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



$Q: 3x - 12y + z + 3 = 0$ را تعیین کنید که از دو خط متوازی و

$$D': \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t - 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad D: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

فاصله باشد.

حل: معادله صفحه مکان هندسی نقطه متساوی الفاصله از دو خط D و D' را پیدا می‌کنیم و فصل مشترک آن را با صفحه Q به دست می‌آوریم.

$$D: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{cases} p = -1 \\ q = 2 \\ r = 0 \end{cases}$$

$$D': \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t - 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_r \begin{cases} p' = -2 \\ q' = 4 \\ r' = 0 \end{cases}$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_r \Rightarrow \vec{V}(p = -1, q = 2, r = 0),$$

$$A_1 \in D(2, -1, 1), A_r \in D'(0, -3, 2)$$

$$[q(z-z_1) - r(y-y_1)]^2 + [r(x-x_1) - p(z-z_1)]^2$$

$$+ [p(y-y_1) - q(x-x_1)]^2$$

$$= [q(z-z_r) - r(y-y_r)]^2 + [r(x-x_r) - p(z-z_r)]^2$$

$$+ [p(y-y_r) - q(x-x_r)]^2$$

$$\Rightarrow [2(z-1) - 0(y+1)]^2 + [0(x-2) + 1(z-1)]^2$$

$$+ [-1(y+1) - 2(x-2)]^2 = [2(z-2) - 0(y+3)]^2$$

$$\vec{A_r M} \wedge \vec{V} (-3z - y + 12 \text{ و } +x + 2z - 7 \text{ و } -2y + 3x + 3)$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\vec{A_1 M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{|\vec{A_r M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\vec{A_1 M} \wedge \vec{V}|^2 = |\vec{A_r M} \wedge \vec{V}|^2 \Rightarrow$$

$$(3z + y - 1)^2 + (-x - 2z + 4)^2 + (2y - 3x)^2$$

$$= (3z + y - 12)^2 + (-x - 2z + 7)^2 + (2y - 3x - 3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{-2x + 4y + 8z - 25 = 0}$$

معادله مکان هندسی نقطه متساوی الفاصله از دو خط D و D'

تبصره: با قرار دادن مقادیر $(p = 2 \text{ و } q = 3 \text{ و } r = -1)$ و

در $(x_1 = 0 \text{ و } y_1 = 0 \text{ و } z_1 = 2)$ و $(x_r = -1 \text{ و } y_r = 0 \text{ و } z_r = 4)$

معادله کلی مکان هندسی نقطه متساوی الفاصله از دو خط در فضا یعنی:

$$[q(z-z_1) - r(y-y_1)]^2 + [r(x-x_1) - p(z-z_1)]^2$$

$$+ [p(y-y_1) - q(x-x_1)]^2$$

$$= [q(z-z_r) - r(y-y_r)]^2 + [r(x-x_r) - p(z-z_r)]^2$$

$$+ [p(y-y_r) - q(x-x_r)]^2$$

نیز می‌توان معادله مکان هندسی مورد نظر را به دست آورد.

$$[2(z-2) + 1(y-0)]^2 + [-1(x-0) - 2(z-2)]^2$$

$$+ [2(y-0) - 3(x-0)]^2 = [2(z-4) + 1(y-0)]^2$$

$$+ [-1(x+1) - 2(z-4)]^2 + [2(y-0) - 3(x+1)]^2$$

$$\Rightarrow \boxed{-2x + 4y + 8z - 25 = 0}$$

مثال ۴: معادله مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه

۱- صفحه P و دو خط متوازی D_1 و D_2 غیر واقع بر آن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشند (بحث کنید).

۲- خطهای متوازی D و D' و نقاط A و B غیر واقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای مانند C متساوی‌الفاصله از D و D' چنان بیابید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳- دو خط متوازی D و D' و دو نقطه A و B واقع بر خط D مفروضند. نقطه‌ای مانند C در فضا متساوی‌الفاصله از D و D' چنان تعیین کنید که مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد.

۴- منشور مثلث‌القاعده $ABCA'B'C'$ مفروض است. (۱) مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از یالهای این منشور (AA' و BB' و CC') را تعیین کنید. (۲) نقطه‌ای روی مقطع قائم $A''B''C''$ از این منشور را تعیین کنید که از سه یال آن به یک فاصله باشد.

۵- معادله مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی

$$D_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{1} \text{ و } D_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \text{ را تعیین کنید.}$$

$$D_2: \begin{cases} 2x+y=0 \\ y+z=-1 \end{cases} \text{ و } D_1: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+3 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

$$D_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{4} \text{ و } D_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشد.

۷- دو نقطه $A(1, 2, -1)$ و $B(0, 1, 1)$ و خطهای موازی $D: x=y=z$ و $D': x-1=y+1=z-3$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو نقطه A و B، همچنین از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله باشد.



$$+ [0(x-0) + 1(z-2)]^2 + [-1(y+2) - 2(x-0)]^2$$

$$\Rightarrow 4(z-1)^2 + (z-1)^2 + (-2x-y+3)^2$$

$$= 4(z-2)^2 + (z-2)^2 + (-2x-y-3)^2$$

$$\Rightarrow 24x + 12y - 10z + 15 = 0$$

معادله مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از D و D'

$$\begin{cases} 24x + 12y - 10z + 15 = 0 \\ 3x - 12y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 27x - 9z + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 27x = 9(z-2) \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{z-2}{27} \Rightarrow \boxed{x = \frac{z-2}{3}} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 24x + 12y - 10z + 15 = 0 \\ 3x - 12y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 54x - 108y + 45 = 0$$

$$\Rightarrow 54x = 108y - 45 \Rightarrow 54x = 108(y - \frac{5}{12}) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{108} = \frac{y - \frac{5}{12}}{54} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y - \frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - \frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{5}{12}}{1} = \frac{z}{6}}$$

معادله کانونیک خط جواب مسأله

تمرین: برای هر مکان هندسی که تاکنون ارائه شده است، مسأله‌هایی مطرح شده است (به ترتیب ارائه مکانها). در صورتی که شما مسأله‌های دیگری درباره این مکانهای هندسی سراغ دارید، به نشانی مجله ریاضی برهان ارسال فرمایید تا برای تکمیل مسأله‌ها مورد استفاده قرار گیرد. از لطف شما قبلاً سپاسگزاری می‌شود.

