

و خط Δ جواب مسأله است. بر حسب نوع چهارضلعی و مقادیرهای K_1 و K_2 در تعداد جوابها می توان بحث کرد.

مثال ۴. دو نقطه $A(3, -1)$ و $B(-2, 4)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه مختصات را تعیین کنید که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۵، یعنی $MA^2 - MB^2 = 5$ باشد.

حل. فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، خواهیم داشت:

$$A(3, -1), B(-2, 4), M(x, y), MA^2 - MB^2 = 5 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 - (x+2)^2 - (y-4)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$-10x + 10y - 15 = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

همان طوری که دیده می شود، مکان هندسی خواسته شده، یک خط راست است، که بر خط AB عمود است؛ زیرا اگر این خط را Δ بنامیم، داریم:

$$m/\Delta = 1, m/AB = \frac{4+1}{-2-3} = -1 \Rightarrow m/\Delta \cdot m/AB = -1$$

$$\Rightarrow \Delta \perp AB$$

اگر نقطه برخورد Δ با خط AB یعنی نقطه H را به دست آوریم، با فرض این که I وسط پاره خط AB باشد، درستی رابطه $IH = \frac{5}{2AB}$ نیز قابل اثبات است.

مثال ۵. روی منحنی به معادله $y = \frac{x-4}{x+2}$ نقطه‌ای بیابید که

تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 5)$ برابر ۸ باشد.

حل. می دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت ۸ باشد، خطی است راست عمود بر خط AB . نقطه یا نقطه‌های برخورد این خط با منحنی داده شده، جواب مسأله است. برای به دست آوردن معادله مکان هندسی موردنظر، فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. با توجه به این که $A(-2, 1)$ و $B(2, 5)$ است، داریم:

$$MA^2 - MB^2 = 8 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 - (x-2)^2 - (y-5)^2 = 8$$

$$(y-5)^2 = 8 \Rightarrow 8x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y = -x + 4$$

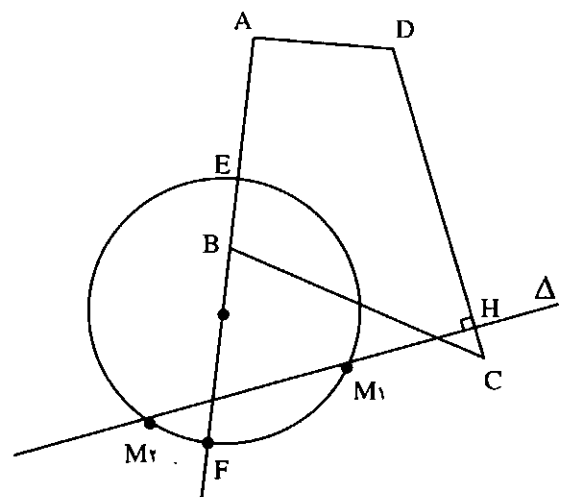
این خط با دایره داده شده، جواب مسأله است (وسط پاره خط AB نقطه O مرکز دایره است).

بحث ۱. اگر $OH < R$ یعنی $\frac{K}{2R} < R$ یا $K < 2R^2$ باشد، مسأله دو جواب دارد.

۲. اگر $OH = R$ یعنی $\frac{K}{2R} = R$ یا $K = 2R^2$ باشد، مسأله تنها یک جواب دارد.

۳. اگر $OH > R$ یعنی $\frac{K}{2R} > R$ یا $K > 2R^2$ باشد، مسأله جواب ندارد.

مثال ۳. چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. نقطه‌ای در صفحه این چهارضلعی بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر K_1 و تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه C و D برابر K_2 باشد.



حل. می دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت K_1 می باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت K_1 تقسیم می کند (دایره آپولونیوس). این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M که برای آن $MC^2 - MD^2 = K_2$ است، خط راستی مانند Δ عمود بر خط CD ، در نقطه‌ای مانند H است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره خط CD باشد، $IH = \frac{K_2}{2CD}$ است. این خط را نیز رسم می کنیم. نقطه‌های برخورد دایره آپولونیوس

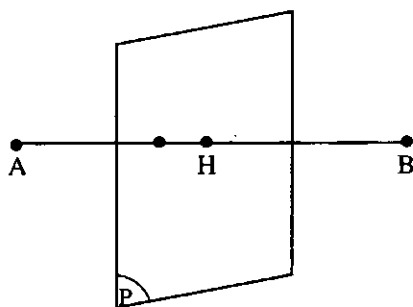
$$y = -1, y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5, x = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow M_1 \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \end{vmatrix} \text{ و } M_2 \begin{vmatrix} -5 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \text{نقطه های جواب مسأله}$$

نکته. می توان معادله مکانهای هندسی خواسته شده را با استفاده از تعریف این مکانها به دست آورد.

به عنوان مثال، برای تعیین معادله دایره مکان هندسی در این مسأله، مختصات نقطه I وسط پاره خط AB را که مرکز دایره است، به دست می آوریم و شعاع آن را از دستور $R = \frac{1}{2} \sqrt{2K^2 - a^2}$ که در آن $K^2 = 39$ و $a = AB$ است، محاسبه می کنیم و در رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ قرار می دهیم.

۱۰- مکان هندسی نقطه ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، صفحه ای است عمود بر خط AB.



برهان به روش هندسی. یکی از صفحه های گذرنده بر خط AB را R و وسط پاره خط AB را I می نامیم. آن گاه مکان هندسی نقطه M از این صفحه را که تفاضل مربعهای فاصله اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است، مشخص می کنیم. می دانیم که این مکان هندسی، خطی راست است که در نقطه ای مانند H بر خط AB عمود است، به قسمی که $IH = \frac{K}{2AB}$ است. این خط

را رسم می کنیم و Δ می نامیم.

حال صفحه R را حول خط AB دوران می دهیم. در هر

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{x-4}{x+2} \end{cases} \Rightarrow -x + 4 = \frac{x-4}{x+2} \Rightarrow$$

$$(x-4)(x+2+1) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -3 \Rightarrow$$

$$M_1 \begin{vmatrix} x=4 \\ y=0 \end{vmatrix} \quad M_2 \begin{vmatrix} x=-3 \\ y=7 \end{vmatrix} \quad \text{نقطه های جواب مسأله}$$

مثال ۶. سه نقطه $A(3,0)$ ، $B(0,2)$ و $C(-1,-3)$ داده شده است. نقطه ای از این صفحه مختصات تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله اش از دو نقطه A و B، برابر ۳۹ و تفاضل مربعهای فاصله اش از دو نقطه B و C، برابر ۶ باشد.

حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که مجموع مربعهای فاصله اش از دو نقطه A و B برابر ۳۹ باشد، دایره ای است به مرکز وسط AB. برای پیدا کردن معادله این دایره، فرض می کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. داریم:

$$M(x,y), A(3,0), B(0,2)$$

$$MA^2 + MB^2 = 39 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2 = 39$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 26 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - 13 = 0 \quad (1)$$

از طرفی، مکان هندسی نقطه ای که تفاضل مربعهای فاصله اش از دو نقطه C و B، برابر ۶ است، خط راستی بر عمود BC است. برای تعیین معادله این خط، فرض می کنیم $M'(x,y)$ یک نقطه از آن باشد. داریم:

$$M'(x,y) \text{ و } B(0,2) \text{ و } C(-1,-3)$$

$$M'C^2 - M'B^2 = 6$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 - (x-0)^2 - (y-2)^2 = 6$$

$$\Rightarrow 2x + 10y = 0 \Rightarrow x + 5y = 0 \quad (2)$$

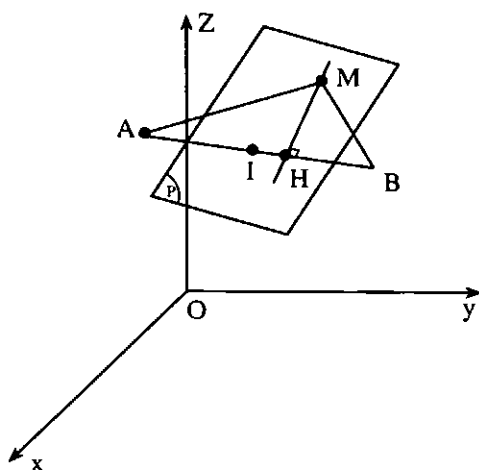
حال نقطه یا نقطه های برخورد دو مکان هندسی (۱) و (۲) را

که جوابهای مسأله است، به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 2y - 13 = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-5y)^2 + y^2 - 3(-5y) - 2y - 13 = 0 \Rightarrow$$

$$26y^2 + 13y - 13 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow$$



$$MA^2 - MB^2 = K \Rightarrow$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 -$$

$$(x - x_2)^2 - (y - y_2)^2 - (z - z_2)^2 = K$$

و یا:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z +$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = K$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z +$$

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 - K) = 0 \quad (1)$$

معادله بالا، صفحه‌ای را نشان می‌دهد که بر خط AB عمود است، زیرا اگر این صفحه را P بنامیم، بردار نرمال صفحه P موازی بردار $\vec{AB}$ است؛ زیرا داریم:

$$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{v}_P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

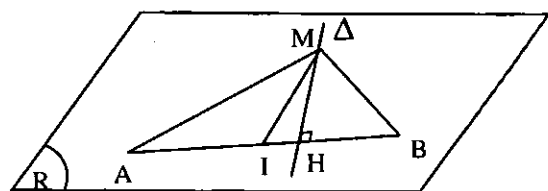
بنابراین، صفحه P بر خط AB عمود است. پسادگی می‌توان نشان داد که صفحه P در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود می‌باشد؛

به قسمی که اگر I وسط پاره خط AB باشد، $IH = \frac{K}{2AB}$ است.

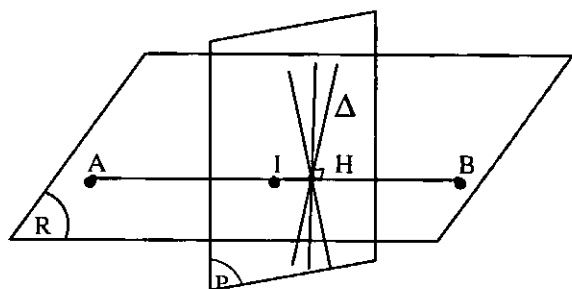
برای این کار، کافی است نقطه برخورد خط AB به معادله

$$AB: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

آوریم و با توجه به این که $I(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$ وسط



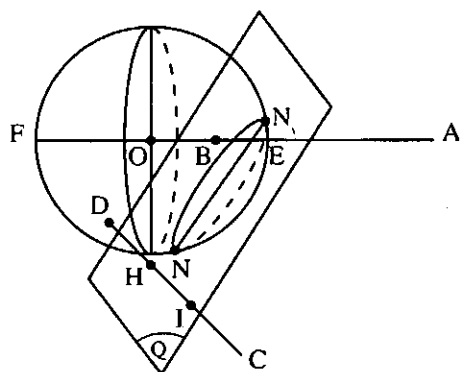
موقعیت جدیدی از صفحه R، خط Δ در نقطه H بر خط AB عمود است. بنابراین، مکان هندسی نقطه M در فضا، مجموعه خطهایی از فضا را تشکیل می‌دهند که در نقطه H بر خط AB است و می‌دانیم که این مجموعه، صفحه‌ای مانند P را تشکیل می‌دهند که در نقطه H بر خط AB عمود است.



بعکس، هر نقطه مانند M از صفحه P جزء مکان هندسی موردنظر می‌باشد؛ زیرا اگر از M به H وصل کنیم، خط MH در نقطه H بر خط AB عمود است و $IH = \frac{K}{2AB}$ است.

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت K است، صفحه‌ای است که در نقطه ثابتی مانند H بر خط AB عمود است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره خط AB باشد، $IH = \frac{K}{2AB}$ است.

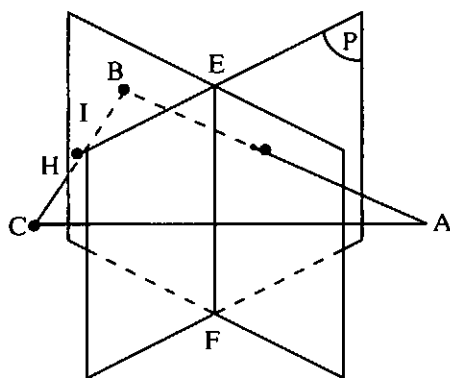
برهان به روش تحلیلی. دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات دکارتی $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است. در این صورت خواهیم داشت:



پاره خط $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ و

است، با محاسبه IH ، درستی رابطه $IH = \frac{K}{\gamma_{AB}}$ را ثابت کنیم.

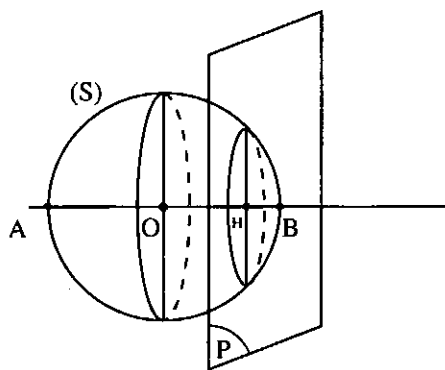
مثال ۱. سه نقطه A ، B و C داده شده است. مجموعه نقطه‌هایی از فضا را بیابید که به یک فاصله از دو نقطه A و B می‌باشند و تفاضل مربعات فاصله‌شان از دو نقطه B و C برابر عدد ثابت K است.



که قطرش پاره خط AB را به نسبت K_1 تقسیم می‌کند (کره آپولونیوس). این کره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت C و D برابر عدد ثابت K_2 است، صفحه‌ای است عمود بر خط CD ، در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره خط CD باشد، $IH = \frac{K_2}{\gamma_{CD}}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم. فصل

مشترک این صفحه با کره آپولونیوس (در صورت وجود) جواب مسأله است (در شکل دایره به قطر NN' جواب مسأله است).

مثال ۳. کره $S(O, R)$ و قطر AB از این کره داده شده است. مجموعه نقطه‌هایی از این کره را تعیین کنید که تفاضل مربعات فاصله‌شان از دو نقطه A و B برابر عدد ثابت K باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌شان از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت K می‌باشد، صفحه‌ای مانند P است که در نقطه H بر خط AB عمود است؛ به قسمی که $OH = \frac{K}{\gamma_{AB}}$ یا $OH = \frac{K}{\gamma_{R}}$ است که O مرکز کره

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه A و B به یک فاصله است، صفحه عمود منصف پاره خط AB است. این صفحه را رسم می‌کنیم و P می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است، صفحه‌ای است عمود بر خط BC در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره خط BC باشد، $IH = \frac{K}{\gamma_{BC}}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم و آن را Q می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحه P و Q جواب مسأله است. این دو صفحه، چون ناموازی‌اند؛ بنابراین، متقاطع می‌باشند و مسأله همواره دارای جواب است.

مثال ۲. چهار نقطه A ، B ، C و D غیر واقع در یک صفحه داده شده است. مجموعه نقطه‌هایی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطه A و B برابر K_1 و تفاضل مربعات فاصله‌شان از دو نقطه C و D برابر K_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت K_1 است، یک کره است

$$AB \text{ وسط } I(1, \frac{1}{2}, 2) \Rightarrow$$

$$IH = \sqrt{(\frac{6}{17}-1)^2 + (\frac{25}{17}-\frac{1}{2})^2 + (\frac{23}{17}-2)^2}$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\frac{2057}{34}}$$

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (2+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

$$IH = \frac{K}{2AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2057}}{34} = \frac{11}{2\sqrt{17}} \Rightarrow 187 = 187$$

مثال ۵. روی خط $D: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ نقطه‌ای بیابید

که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه $A(3, 0, 2)$ و $B(1, -2, 0)$ برابر ۴ باشد.

حل. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۴ است، می‌نویسیم و نقطه برخورد آن با خط D را به دست می‌آوریم.

اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، داریم:

$$MA^2 - MB^2 = 4 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 - (x-1)^2 - (y+2)^2 - z^2 = 4$$

$$-4x - 4y - 4z + 4 = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0 \quad (1)$$

(۱) معادله صفحه مکان هندسی موردنظر است که آن را صفحه

P می‌نامیم.

$$D: \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} = t \Rightarrow x = 3t+2, y = -t, z = 2t-1 \\ P: x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t+2-t+2t-1-1=0 \Rightarrow 4t=0 \Rightarrow t=0$$

$$\Rightarrow M_1(2, 0, -1) \quad \text{نقطه جواب مسأله}$$



است. فصل مشترک صفحه P با کره (در صورت وجود) که یک دایره یا یک نقطه است، جواب مسأله است.

با توجه به این که در این مسأله $OH = \frac{K}{2R}$ است، می‌توان در

وجود جواب مسأله بحث کرد؛ بدین ترتیب که OH را با R شعاع کره مقایسه کنیم.

مثال ۴. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه $A(2, -1, 3)$ و $B(0, 2, 1)$ برابر ۱۱ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، داریم:

$$A(2, -1, 3) \text{ و } B(0, 2, 1) \text{ و } M(x, y, z)$$

$$MA^2 - MB^2 = 11 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 - (x-0)^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 = 11$$

$$-4x + 6y - 4z + 9 = 11 \Rightarrow 2x - 3y + 2z + 1 = 0 \quad (1)$$

(۱) معادله صفحه مکان هندسی موردنظر است که آن را P می‌نامیم.

می‌توانیم تحقیق کنیم که این صفحه در نقطه‌ای مانند H بر

خط AB عمود است، به قسمی که $IH = \frac{11}{2AB}$ است. برای این

منظور چنین عمل می‌کنیم:

$$AB / \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow AB / \frac{x-2}{0-2}$$

$$= \frac{y+1}{2+1} = \frac{z-3}{1-3}$$

$$\Rightarrow AB / \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2} = t \Rightarrow x = -2t+2, y = 3t-1, z = -2t+3 \\ 2x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(-2t+2) - 3(3t-1) + 2(-2t+3) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -17t + 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{14}{17} \Rightarrow H(\frac{6}{17}, \frac{25}{17}, \frac{23}{17})$$