

مکان هندسی

(فصل هفتم)



با تقسیم دو طرف این معادله بر $-L$ داریم :

$$-\frac{A}{L}x^2 - \frac{B}{L}y^2 - \frac{C}{L}z^2 = 1 \quad (1)$$

اگر A, B و C همعلامت باشند ؛ ولی علامتشان مخالف علامت L

باشد، با انتخاب $-\frac{A}{L} = \frac{1}{a^2}$ ، $-\frac{B}{L} = \frac{1}{b^2}$ و $-\frac{C}{L} = \frac{1}{c^2}$ ، معادله

(۱) به صورت زیر درمی آید :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

معادله (۲) رویه درجه دومی را مشخص می کند که بیضوی یا بیضی گون یا بیضی وار نامیده می شود. a, b و c را نیمه فطرهای بیضوی می گویند. صفحه های xOy ، yOz و zOx صفحه های تقارن، مبدأ مختصات مرکز تقارن، و محورهای مختصات محور تقارن آن می باشند.

ثابت می توان کرد که فصل مشترک بیضوی با هر صفحه، یک بیضی است و به همین دلیل، آن را بیضوی می نامند. به عنوان مثال :

۱. فصل مشترک صفحه های مختصات $z=0$ ، $y=0$ و

$x=0$ با بیضوی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ بترتیب، بیضیهایی

به معادله های $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ و $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

است.

۲. اگر بیضوی را با صفحه $z=h$ ، $(|h| < c)$ قطع کنیم،

رویه های درجه دوم. رویه هایی که معادله آنها در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ به صورت کلی :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx +$$

$$2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

باشد، رویه های درجه دوم نامیده می شوند.

این معادله را می توان از طریق دوران یا انتقال محورها و یا هر دو، به یکی از دو معادله زیر تبدیل کرد :

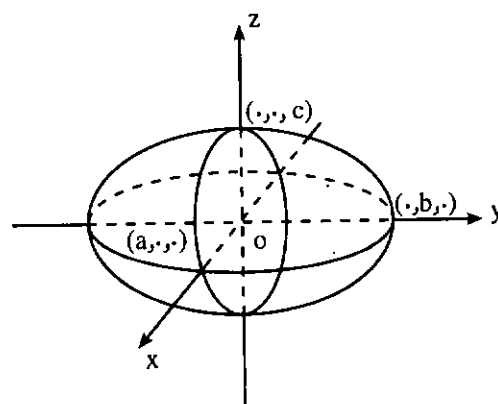
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0 \quad (1) \text{ و } Ax^2 + By^2 + 2Iz = 0 \quad (2)$$

رویه های به معادله (۱) را به دلیل این که مبدأ مختصات، مرکز تقارن آنهاست، رویه های مرکزی و رویه های به معادله (۲) را که این ویژگی را ندارند، رویه های غیر مرکزی می نامند.

بیضوی. معادله کلی رویه های درجه دوم به صورت

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0 \text{ را چنین می توان نوشت :}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = -L$$



$$3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 16y + 4z - 4 = 0$$

نمایشگر یک بیضی است. مختصات مرکز و اندازه نصف قطرهای آن را تعیین کنید.

حل. ثابت می‌کنیم این معادله را به صورت

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

داریم:

$$3x^2 - 12x + 4y^2 - 16y + z^2 + 4z - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 4y) + (z^2 + 4z) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3[(x-2)^2 - 4] + 4[(y-2)^2 - 4] + [(z+2)^2 - 4] - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-2)^2 + 4(y-2)^2 + (z+2)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{36} = 1 \quad \text{معادله بیضی}$$

مختصات مرکز بیضی $O'(2, 2, -2)$

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3},$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3, c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

نیمه‌قطرهای بیضی

مثال ۳. معادله بیضی استاندارد (به مرکز مبدأ مختصات که قطرهاش روی محورهای مختصات واقعند) را که از نقطه‌های $(2, -1, 1)$ ، $(-3, 0, 0)$ و $(1, -1, -2)$ می‌گذرد، بنویسید.

حل. بیضی به معادله کلی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را در نظر

می‌گیریم. شرط آن که این بیضی از نقطه‌های داده شده بگذرد، آن است که مختصات این نقطه‌ها در معادله آن صدق کند. بنابراین:

$$(2, -1, 1) \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \quad (1)$$

$$(-3, 0, 0) \Rightarrow \frac{9}{a^2} + 0 + 0 = 1 \quad (2)$$

$$(1, -1, -2) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = 1 \quad (3)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، $a^2 = 9$ ، $b^2 = \frac{9}{4}$ و $c^2 = 9$ و از

آن‌جا، معادله بیضی‌گون به صورت $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} + \frac{z^2}{9} = 1$

بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$ به دست می‌آید، که نیمه

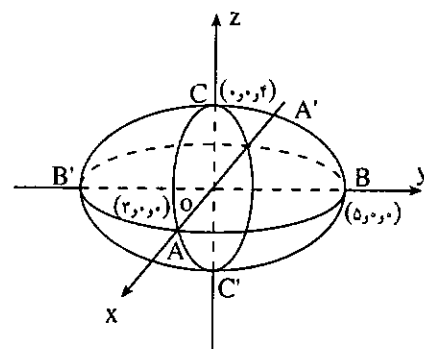
قطرهای آن $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ و $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ است و

بیضی‌هایی که با تغییر h پدید می‌آید، متشابه‌اند؛ یعنی خروج از مرکز آنها برابر است.

تبصره. اگر محورهای بیضی به معادله (۲) موازی محورهای مختصات و نقطه $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ مرکز آن باشد، معادله آن به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

مثال ۱. رویه به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ را مورد بررسی قرار دهید و این رویه را رسم کنید.



حل. این رویه، یک بیضی است که نیمه‌قطرهای آن $a = 3$ ، $b = 5$ و $c = 4$ است. صفحه‌های مختصات، صفحه‌تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است. این بیضی، محور x ‌ها را در نقطه‌های $A(3, 0, 0)$ و $A'(-3, 0, 0)$ ، محور y ‌ها را در نقطه‌های $B(5, 0, 0)$ و $B'(0, -5, 0)$ و محور z ‌ها را در نقطه‌های $C(0, 0, 4)$ و $C'(0, 0, -4)$ قطع می‌کند. فصل مشترک این رویه با صفحه

xOy بیضی به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، با صفحه xOz بیضی به

معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ و با صفحه yOz بیضی به معادله

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad \text{است.}$$

مثال ۲. ثابت کنید معادله

متکی بر مولد باشد.

مدار را می‌توان فصل مشترک کره‌ای که مرکز آن روی Δ واقع است، با صفحه‌ای عمود بر Δ دانست. بنابراین، معادله آن چنین است:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = m \\ ax + by + cz + d = n \end{cases} \quad (2)$$

با تغییر m و n کلیه مدارها مشخص می‌شوند.

چون بین معادله‌های مدار و مولد، یعنی دستگاه‌های (۱) و (۲)، x ، y و z را حذف کنیم، رابطه‌ای بین m و n به صورت $f(m, n) = 0$ به دست می‌آید، که چون در این رابطه به جای m و n مقادارهایشان را از دستگاه (۲) قرار دهیم، معادله رویه دوار به دست می‌آید.

معادله صفحه را به صورت $ax + by + cz = n$ نیز می‌توان در نظر گرفت.

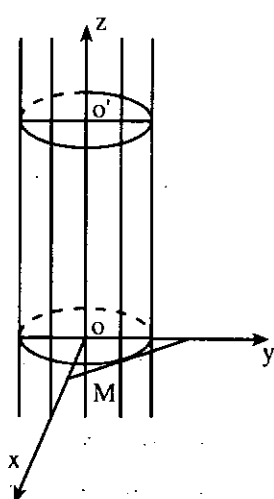
تبصره. مدار سطح دوار را می‌توان فصل مشترک دو کره که مرکزهای آنها روی خط Δ محور رویه دوار قرار دارد، در نظر گرفت. در این صورت، اگر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) دو نقطه واقع بر Δ باشند، معادله مدار به صورت:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = m \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = n \end{cases}$$

خواهد بود.

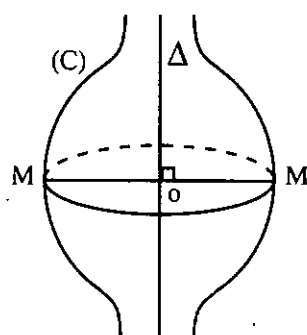
مثال ۱. معادله رویه دوار حاصل از دوران خط

$$D: \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases} \text{ حول محور } z \text{ ها را پیدا کنید.}$$



$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 9 \text{ به دست می‌آید.}$$

رویه‌های دوار. از دوران یک منحنی مسطح مانند (C) حول محوری مانند خط راست Δ که در یک صفحه قرار دارند، رویه‌ای به وجود می‌آید که آن را رویه دوار می‌نامند.

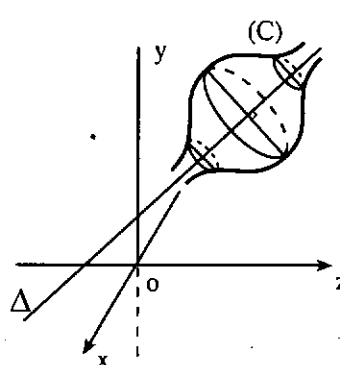


خط Δ محور و منحنی (C) منحنی مولد رویه دوار نامیده می‌شوند. هر نقطه مانند M از منحنی (C) هنگام دوران، دایره‌ای رسم می‌کند که صفحه آن، عمود بر محور دوران و مرکز آن (نقطه O) روی محور دوران است. این گونه دایره‌ها را مدار رویه دوار می‌نامند. صفحه‌هایی را که از محور دوران می‌گذرند، صفحه‌های نصف النهار و فصل مشترک این صفحه‌ها با رویه دوار را منحنی‌های نصف النهار می‌نامند.

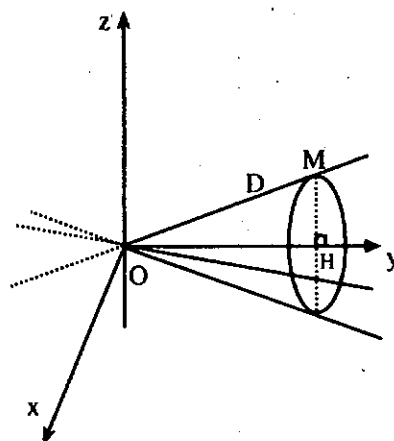
معادله رویه دوار. فرض می‌کنیم خط Δ به معادله

$$\text{محور، و منحنی (C) به معادله‌های } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$



مولد سطح دوار باشند. برای تعیین معادله سطح دوار، ملاحظه می‌کنیم که این رویه از جابه‌جا شدن مداری پدید می‌آید که همواره



می‌آید. معادله یک مدار دلخواه از این رویه دوار به صورت

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ y = n \end{cases} \text{ است. حال بین چهار معادله}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \\ y = n \end{cases}$$

مقدارهای x ، y و z را حذف می‌کنیم. داریم:

$$\Rightarrow n = 3z \Rightarrow z = \frac{n}{3} \Rightarrow 0 + n^2 + \frac{n^2}{9} = m$$

$$\Rightarrow 9m - 10n^2 = 0$$

اکنون با جایگزین کردن مقدار به جای m و n معادله سطح مخروطی دوار به دست می‌آید:

$$9(x^2 + y^2 + z^2) - 10y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$$

مثال ۳. معادله رویه دوار حاصل از دوران خط

$$D: \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$$

$$\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

و (a, b, c) و (a', b', c') را تعیین کنید. Δ می‌باشند.

حل. رویه حاصل، یک سطح مخروطی دوار، یا به طور خلاصه

حل. محور دوران (خط Δ) همان محور z ها و منحنی هادی

یعنی منحنی (c)، خط $D: \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$ است، که موازی محور

z ها می‌باشد. برای تعیین معادله این رویه دوار، مدار دلخواهی از آن را در نظر می‌گیریم که فصل مشترک صفحه $z = n$ و کره‌ای به مرکز $O(0,0,0)$ و شعاع $\sqrt{m}$ باشد؛ یعنی:

$$\text{مدار: } \begin{cases} z = n \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \end{cases}$$

حال کافی است x ، y و z را در چهار معادله زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \\ z = n \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \end{cases}$$

داریم:

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow 1 + 1 + n^2 = m \Rightarrow 2 + n^2 = m$$

با جایگزینی $n = z$ و $m = x^2 + y^2 + z^2$ در رابطه $2 + n^2 = m$ معادله این رویه دوار که یک سطح استوانه‌ای (استوانه‌ای دوار) است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

نکته. فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوار با صفحه‌ای عمود بر محور این سطح دوار یک دایره است. به عنوان مثال، مقطع سطح دوار استوانه به معادله $x^2 + y^2 = 2$ با صفحه xOy به معادله

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases} \text{ (که بر محور } Oz \text{ عمود است) دایره به معادله}$$

است.

$$\text{مثال ۲. معادله رویه دوار حاصل از دوران خط } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$$

حول محور y ها را به دست آورید.

$$\text{حل. منحنی مولد این رویه دوار، خط } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} \text{ خط راستی}$$

واقع در صفحه yOz است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. از دوران این خط حول محور y ها یک سطح مخروطی دوار پدید

است. $\cos \alpha = aa' + bb' + cc'$

بنابراین داریم: $m \cos^2 \alpha = [n - (ax_0 + by_0 + cz_0)]^2$
و با جایگزین کردن m و n در رابطه بالا، معادله سطح مخروطی
دوآر به صورت زیر به دست می آید:

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \cos^2 \alpha =$$

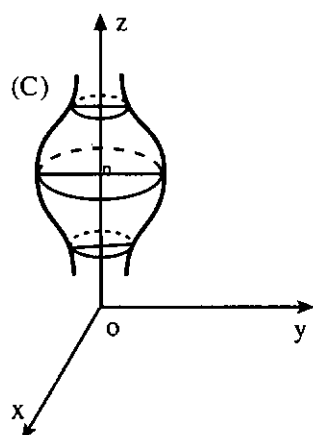
$$[ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)]^2$$

و یا:

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \cos^2 \alpha =$$

$$[a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)]^2$$

مثال ۴. معادله رویه دوآری را بنویسید که محور آن Oz و
 $f(x, z) = 0$ ، معادله نصف النهاری از آن در صفحه xOz باشد.



حل. می توان نصف النهاری به معادله های
را $\begin{cases} f(x, z) = m \\ y = 0 \end{cases}$

مولد این سطح دوآر دانست.

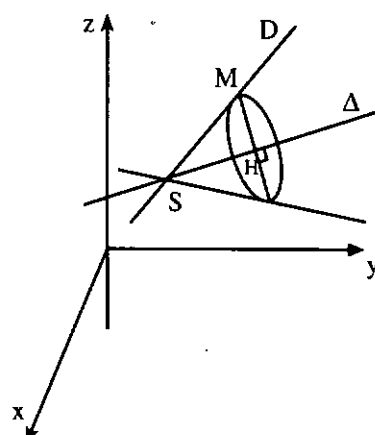
معادله مداری دلخواه از این رویه دوآر چنین است:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = n \end{cases}$$

از حذف x, y و z بین چهار معادله بالا، رابطه زیر بین m و n
به دست می آید:

$$f(m, n) = 0$$

پس معادله این رویه دوآر چنین است:



یک مخروط است، که محور آن، خط

و مولد آن، خط $\Delta: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

است. $D: \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}$

معادله یک مدار دلخواه از این رویه چنین است:

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = m \\ ax + by + cz = n \end{cases}$$

(m و n در دو معادله بالا متغیرند.)

اکنون بین دو معادله بالا و معادله های مولد، یعنی در دستگاه

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'} \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = m \\ ax + by + cz = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a'^2} = \frac{(y - y_0)^2}{b'^2} = \frac{(z - z_0)^2}{c'^2} = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = \frac{m}{1} = m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = a'\sqrt{m}, y - y_0 = b'\sqrt{m}, z - z_0 = c'\sqrt{m} \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = n - ax_0 - by_0 - cz_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow aa'\sqrt{m} + bb'\sqrt{m} + cc'\sqrt{m} = n - ax_0 - by_0 - cz_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m}(aa' + bb' + cc') = n - ax_0 - by_0 - cz_0$$

$$m(aa' + bb' + cc')^2 = [n - (ax_0 + by_0 + cz_0)]^2 \quad \text{و یا}$$

اما اگر زاویه بین دو خط Δ و D را α اختیار کنیم،



محمد باقر یزدی از ریاضیدانان دوره صفویه و معاصر با شاه عباس اول و شاه صفی و شاه عباس دوم بوده و کمی پیش از ۱۰۶۹ هجری در گذشته است.

مهمترین اثر ریاضی او، کتاب عیون الحساب اوست که به عربی نوشته و می توان گفت که آن را به تقلید از مفتاح الحساب غیاث الدین جمشید کاشانی فراهم کرده است. با این همه، در عیون الحساب، مطالبی هست که در مفتاح الحساب دیده نمی شود. مثلاً یزدی در مطلب دوازدهم از باب اول کتاب خود، حالت های خاصی از معادله درجه پنجم را حل کرده است.

عنوان مطلب دوازدهم از باب اول عیون الحساب این است:

«استخراج ریشه اول از مضلعات زائده و ناقصه» و مقصود

یزدی از مضلعات زائده و ناقصه، عباراتی جبری است مثلاً

به صورت $x^4(x+123)$ یا $x^3(x^2+144)$ و غیره.

زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی - ابوالقاسم

قربانی

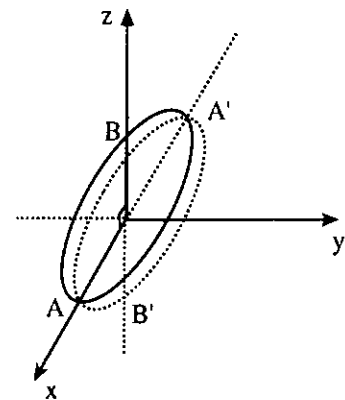
$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$$

یعنی برای تعیین معادله این سطح دوار در معادله نصف النهار به جای x^2 ، مقدار (x^2+y^2) را قرار می دهیم.

مثال ۵. معادله رویه دوار حاصل از دوران بیضی به معادله

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

حول محور z ها را تعیین کنید.



حل. این بیضی را یک نصف النهار از رویه دوار حاصل، در نظر می گیریم. معادله یک مدار دلخواه از این رویه دوار، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ z = n \end{cases}$$

اکنون بین چهار معادله دستگاه بالا: x ، y و z را حذف می کنیم. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \Rightarrow x^2 + 0 + n^2 = m \Rightarrow x^2 = m - n^2 \\ z = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m - n^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1$$

با جایگزینی مقدارهای m و n در رابطه بالا معادله رویه دوار

به دست می آید:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - z^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$