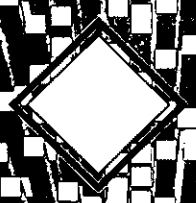


مکان هندسی

(فصل هفتم)



مقطعهای مخروطی

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{cx}{a} \quad (2) \\ \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 &= a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx \\ \Rightarrow x^2 + c^2 - 2cx + y^2 &= a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx \\ \Rightarrow \frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

با توجه به این که $a > c$ است، فرض می‌کنیم $a^2 - c^2 = b^2$ باشد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

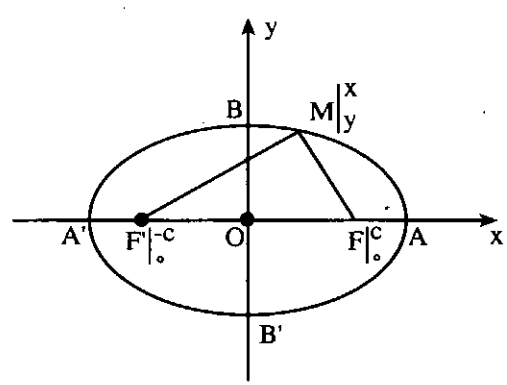
معادله (۳)، معادله بیضی مورد نظر است. بعکس، ثابت می‌شود هر نقطه $M(x, y)$ که مختصاتش در

معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ صدق کند، به بیضی به کانونهای F و F' (با

فرض $FF' = 2c$) و عدد ثابت $2a$ تعلق دارد؛ زیرا:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

معادله بیضی. بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ را در نظر می‌گیریم. خط FF' را محور x ها و عمود منصف پاره خط FF' را محور y ها اختیار می‌کنیم. در این صورت، با توجه به این که $FF' = 2c$ است، $F(+c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ خواهد بود. اگر $M(x, y)$ یک نقطه از این بیضی باشد، داریم:



$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$MF + MF' = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

معادله (۱)، معادله بیضی مورد نظر است. برای گویا کردن این

معادله چنین عمل می‌کنیم:

بیضی است که آن را به طور خلاصه مرکز بیضی نیز می نامند.
 رأسهای بیضی. محور کانونی بیضی آن را در دو نقطه
 $A(+a, 0)$ و $A'(-a, 0)$ و محور ناکانونی بیضی، آن را در دو
 نقطه $B(0, +b)$ و $B'(0, -b)$ قطع می کند، که این چهار نقطه،
 رأسهای بیضی نامیده می شوند.

صورت های دیگر معادله بیضی:

۱. اگر مرکز بیضی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی
 محور x ها باشد، معادله بیضی به صورت

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$
 است.

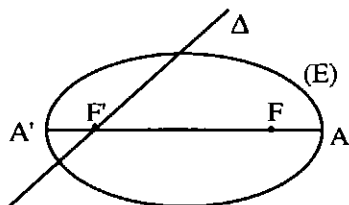
۲. اگر مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات و محور کانونی
 آن روی محور عرضها یعنی $F(0, c)$ و $F'(0, -c)$ باشد، معادله
 بیضی به صورت $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ است.

۳. اگر مرکز بیضی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی
 محور عرضها باشد، معادله آن به صورت

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$
 است.

۴. اگر محورهای بیضی موازی محورهای مختصات نباشند،
 معادله بیضی به صورت کلی
 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ است که در آن A و B
 هم علامت، ولی ناپایرند و $C \neq 0$ می باشد.
 بررسی بیشتر ویژگیهای بیضی، در بحث مقاطعهای مخروطی
 انجام خواهد شد.

مثال ۱. بیضی (E) و خط Δ در یک صفحه مفروضند.
 نقطه ای روی این بیضی بیابید که از خط Δ به فاصله معلوم l
 باشد.



حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که از خط راست Δ به
 فاصله معلوم l قرار دارد، دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی خط Δ و به

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

از این رابطه، $|x| < a$ نتیجه می شود. اما $b^2 = a^2 - c^2$ و $F(c, 0)$ و
 $F'(-c, 0)$ است. بنابراین داریم:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ و } MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx} = \sqrt{(a - \frac{cx}{a})^2} = a - \frac{cx}{a}$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF' = \sqrt{a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx} = \sqrt{(a + \frac{cx}{a})^2} = a + \frac{cx}{a}$$

$$\Rightarrow MF' = a + \frac{cx}{a}$$

از آن جا:

$$MF + MF' = (a - \frac{cx}{a}) + (a + \frac{cx}{a}) = 2a$$

$$\Rightarrow MF + MF' = 2a$$

یعنی M روی بیضی است که کانونهای آن F و F' و عدد ثابتش
 2a است.

نکته. $MF = a - \frac{cx}{a}$ و $MF' = a + \frac{cx}{a}$ را اندازه شعاع

حاملهای نقطه M می نامند.

محورهای تقارن و مرکز تقارن بیضی. بیضی به معادله

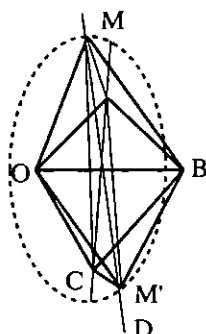
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 را در نظر می گیریم. با تبدیل y به -y، این معادله

تغییر نمی کند. بنابراین، محور x ها، یعنی خط FF'، محور تقارن
 بیضی است که آن را محور کانونی بیضی نیز می نامند.

با تبدیل x به -x، این معادله تغییر نمی کند. بنابراین، محور
 y ها یعنی عمود منصف پاره خط FF' محور تقارن بیضی است که
 آن را محور ناکانونی بیضی نیز می نامند.

با تبدیل x به -x و y به -y معادله بالا تغییر نمی کند. بنابراین
 مبدأ مختصات یعنی محل برخورد دو محور تقارن آن، مرکز تقارن

حل. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت $AB + BC$ است، یک بیضی به کانونهای A و C و عدد ثابت $AB + BC$ است که از نقطه B نیز می‌گذرد. این بیضی را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که به یک فاصله از دو نقطه B و D است، عمود منصف پاره خط BD است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله دارای جواب است.



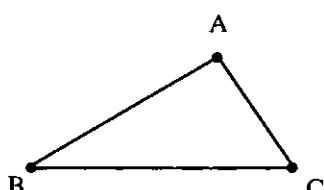
مثال ۴. در مثلثی ضلع BC ثابت است؛ اما رأس A چنان

تغییر مکان می‌دهد که $\frac{\hat{A}}{\gamma} \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma} AB \cdot AC$ مقدار ثابتی است. مکان هندسی رأس A را بیابید.

حل. مثلث ABC به ضلع ثابت $BC = a$ را در نظر می‌گیریم و

مقدار ثابت $\frac{\hat{A}}{\gamma} \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma} AB \cdot AC$ را برابر k اختیار می‌کنیم؛ یعنی

$$bc \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma} = k \quad (1)$$

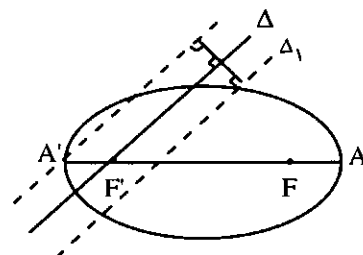


می‌دانیم که در هر مثلث ABC به ضلعهای $BC = a$

$AB = c$ و $AC = b$ داریم:

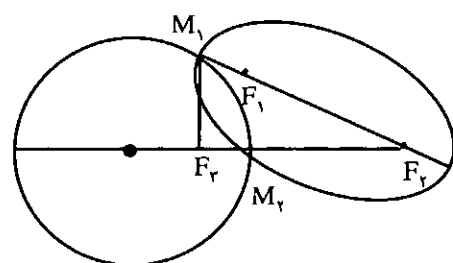
$$\cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} \quad (2)$$

فاصله‌ای از این خط می‌باشد. این دو خط را رسم می‌کنیم، نقطه‌های برخورد Δ_1 و Δ_2 با بیضی (E) جوابهای مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله، دارای جواب است.



مثال ۲. سه نقطه F_1 ، F_2 و F_3 در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه F_1 و F_2 برابر F_3 و نسبت فاصله‌اش از دو نقطه F_2 و F_3 برابر 1_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 ، مقدار معلوم 1_1 باشد، یک بیضی به کانونهای F_1 و F_2 و عدد ثابت 1_1 است. این بیضی را رسم می‌کنیم (بیضی (E)). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت F و F' ، مقدار ثابت 1 است، یک دایره است که قطرش پاره خط FF' را به نسبت 1_2 تقسیم می‌کند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم (دایره آپولونیوس (C)). نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله دارای جواب است.



مثال ۳. چهارضلعی ABCD در یک صفحه داده شده است.

نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه A و C برابر $AB + BC$ و به یک فاصله از دو نقطه B و D باشد.

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود :

$$\Rightarrow 9[(x-2)^2 - 4] + 25[(y-2)^2 - 4] - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2 + 25(y-2)^2 = 225$$

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad (2)$$

معادله (۲) را معادله استاده یا استاندارد یا کانونیک بیضی جواب مسأله می نامند.

راه دوم. با توجه به تعریف مکان هندسی جواب مسأله، یک بیضی است، که چون $y_F = y_{F'} = 2$ است، محور تقارن آن موازی محور x هاست و بنابراین معادله آن به صورت کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{است؛ اما:}$$

$$C \text{ مرکز بیضی} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \\ \beta = \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CF = c = \sqrt{(6-2)^2 + (2-2)^2} = 4 \quad \text{و}$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

از آن جا معادله بیضی به صورت زیر می باشد :

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

مثال ۶. معادله بیضی را که $F(5, 3)$ و $F'(-1, 7)$ دو کانون آن، و عدد ثابتش برابر ۸ است، بنویسید.

حل. فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت داریم :

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} -1 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \quad \text{و}$$

$$MF' = \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$MF + MF' = 8 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} +$$

$$bc \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = k \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 4k$$

$$\Rightarrow b+c = \sqrt{a^2 + 4k} = \text{مقدار ثابت}$$

$$\Rightarrow AB + AC = \sqrt{a^2 + 4k} = Cte$$

چون دو نقطه B و C ثابت و $AB + AC$ مقدار ثابت

$\sqrt{a^2 + 4k}$ است، بنابراین، مکان هندسی رأس A یک بیضی به

کانونهای B و C و عدد ثابت $2a = \sqrt{a^2 + 4k}$ است.

مثال ۵. معادله مکان هندسی نقطه ای از صفحه مختصات xoy را تعیین کنید که مجموع فاصله اش از دو نقطه $F(6, 2)$ و $F'(-2, 2)$ واقع در این صفحه، برابر ۱۰ باشد.

حل. راه اول. فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. در این صورت داریم :

$$MF = \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2},$$

$$MF' = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$MF + MF' = 10 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} +$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = 10 - \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = 100 + (x+2)^2 + (y-2)^2 -$$

$$20\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -16x - 68 = -20\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -4x - 17 = -5\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 289 + 136x = 25(x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8)$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 36x - 100y - 89 = 0 \quad (1)$$

معادله (۱)، معادله مکان هندسی مورد نظر است که یک بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۱۰ است. این معادله را به

صورت زیر می توان نوشت :

$$x^2 - 36x + 25y^2 - 100y - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 4y) - 89 = 0$$

$$\Rightarrow -2x + y - 6 = -3\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 36 - 4xy + 24x - 12y$$

$$= 9x^2 + 9y^2 - 36y + 36$$

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 36y = 0 \quad \text{معادله بیضی}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 36y = 0 \\ x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(4y^2) + 8y^2 + 4y(2y) - 24(2y) - 36y = 0$$

$$36y^2 - 48y - 36y = 0 \Rightarrow 36y^2 - 84y = 0$$

$$\Rightarrow 12y(3y - 7) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \frac{7}{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

$$y = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) \quad \text{نقطه های جواب مسأله}$$

مثال ۸. دو نقطه $A(3,2)$ و $B(-1,2)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده اند. نقطه M از صفحه این دستگاه مختصات را تعیین کنید که برای آن $MA + MB = 6$ و $MA^2 + MB^2 = \frac{41}{2}$ باشد.

حل. نقطه یا نقطه های جواب مسأله، نقطه یا نقطه های برخورد بیضی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۶ و دایره ای به مرکز وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{41 - AB^2}$ است. بنابراین، معادله این بیضی و دایره را به دست آورده، نقطه های برخورد آنها را (در صورت وجود) تعیین می کنیم.

چون $y_A = y_B = 2$ است محور کانونی بیضی موازی محور x هاست. بنابراین داریم:

$$\text{مرکز بیضی } C \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$CA = c = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2} = 2, 2a = 6, a = 3$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \quad \text{معادله بیضی}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = 8 - \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 64 + (x+1)^2 + (y-7)^2 -$$

$$16\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -12x + 8y - 80 = -16\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -3x + 2y - 20 = -4\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 + 400 - 12xy + 120x - 80y$$

$$= 16x^2 + 32x + 16 + 16y^2 - 224y + 784$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 12y^2 + 12xy - 88x - 144y + 400 = 0$$

معادله به دست آمده، معادله بیضی مورد نظر است که محورهای تقارن آن، ناموازی با محورهای مختصات می باشند.

نکته. اگر زاویه $F'F$ با جهت مثبت محور x ها را α بنامیم، با یک دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه α ، محورهای تقارن بیضی موازی محورهای مختصات جدید می گردد و معادله بیضی را می توان با استفاده از دستور

$$\frac{(X-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(Y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{به دست آورد.}$$

مثال ۷. نقطه ای روی خط $\Delta: x - 2y = 0$ تعیین کنید که مجموع فاصله اش از دو نقطه $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر ۶ باشد. حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که مجموع فاصله اش از دو نقطه ثابت $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر مقدار ثابت ۶ است، یک بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۶ است. معادله این بیضی را به دست می آوریم و نقطه یا نقطه های برخورد آن با خط Δ را تعیین می کنیم. برای این منظور، فرض می کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، داریم:

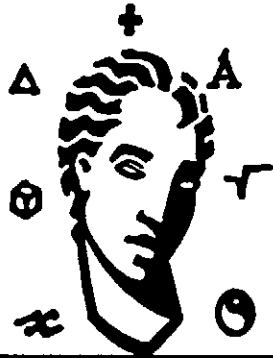
$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}, MF + MF' = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + y^2$$

$$= 36 + x^2 + y^2 - 4y + 4 - 12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -8x + 4y - 24 = -12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$



تقریب اندیشه ۳

مقدار x را پیدا کنید

x عددی است بین یک تا ۵۰ و اعمالی در جهت سهم روی عدد x انجام گردیده، سعی کنید با توجه به اعمال فوق عدد نامعلوم x را پیدا کنید.

x	$\times 4$	$+17$	$\times 9$	
-۵۴				-۹۳
:۲		$x=?$		:۲
-۷۲				$\times 5$
	$\times 4$	:۳	-۴۸	

از صمد پور اسدا...

جواب در صفحه ۸۸

$$\text{مرکز دایره } C \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}, AB = 2c = 4$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - AB^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{2\left(\frac{41}{2}\right) - 16} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4} \quad \text{معادله دایره}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{\frac{25}{4} - (x-1)^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow 5(x-1)^2 + \frac{225}{4} - 9(x-1)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow x-1 = \pm \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{45}{16} + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = \frac{55}{16} \Rightarrow y-1 = \pm \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$y = 1 \pm \frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow M_1 \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_2 \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_3 \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_4 \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{55}}{4} \right)$$

مسئله چهار جواب دارد.

