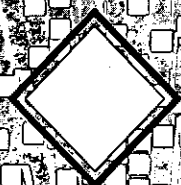


مکان هندسی

(فصل نهم)



بیضوی دوار

می گیریم. از دوران این بیضی حول محور x ها یک بیضوی دوار پدید می آید. برای تعیین معادله این بیضوی دوار، بیضی (E) به

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادله را یک نصف النهار از آن در نظر می گیریم.

معادله یک مدار دلخواه از این بیضوی دوار چنین است :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ x = n \end{cases}$$

اکنون بین ۴ معادله دستگاه زیر x, y و z را حذف می کنیم.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \\ x = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 + y^2 + 0 = m \Rightarrow y^2 = m - n^2$$

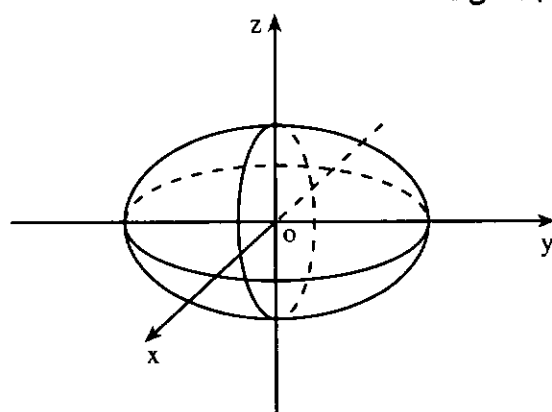
$$\Rightarrow \frac{n^2}{a^2} + \frac{m - n^2}{b^2} = 1$$

اکنون به جای m و n مقدار می گذاریم تا معادله بیضوی دوار به دست آید. داریم :

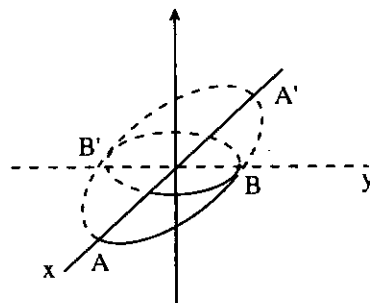
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

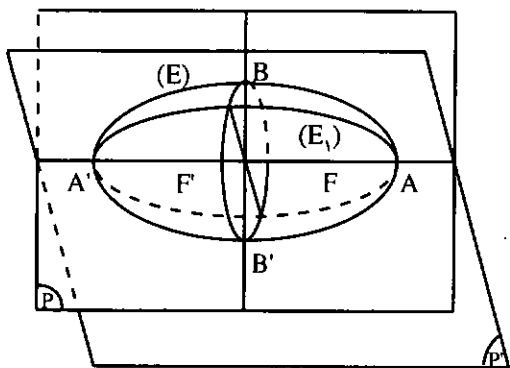
در ادامه بحث مقاطع مخروطی، در این مقاله، مطالبی را راجع به بیضوی دوار و هذلولی مطرح می کنیم.

۱۳. بیضوی دوار. از دوران بیضی (E) به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ حول یکی از محورهای تقارنش، بیضوی دوار پدید می آید.



معادله بیضوی دوار. بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ واقع در صفحه xOy از دستگاه مختصات $xyz - O$ را در نظر





تبصره ۱. اگر بیضی (E) به معادله $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ را حول

محور yها دوران دهیم، بیضوی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ به دست می آید.

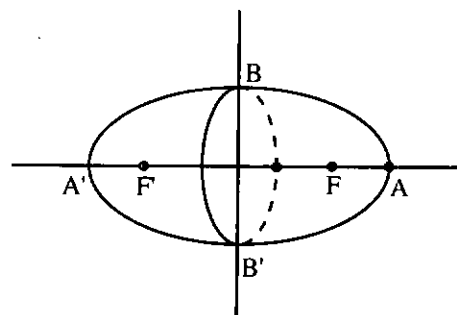
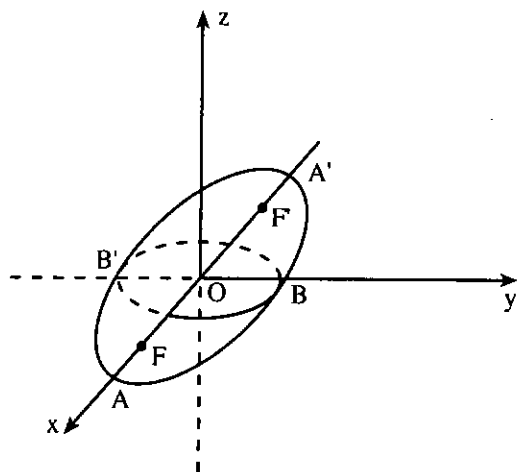
تبصره ۲. از دوران بیضی به معادله $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ حول

محور zها بیضوی دوآر به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ به دست می آید.

تبصره ۳. هرگاه در بیضوی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ، $a = b$ یا $c = a$ ، $b = c$ باشد، بیضوی بترتیب، به بیضویهای

دوآر به معادله های $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ و $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ تبدیل می گردد.

تبصره ۴. اگر بیضی (E) به کانونهای F و F' حول محور کانونی FF' دوران کند، بیضوی دوآری پدید می آید که مجموع فاصله هر نقطه واقع بر آن، از دو نقطه ثابت F(f, 0, 0) و F'(-f, 0, 0)، برابر مقدار ثابت 2a است.



$$MF + MF' = 2a, \quad MF = \sqrt{(x-f)^2 + y^2 + z^2},$$

$$MF' = \sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-f)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2} = 2a$$

این معادله را گویا می کنیم:

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2 + z^2} = 2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2}$$

اثبات به روش هندسی: صفحه ای را که بیضی در آن قرار دارد، P می نامیم و این صفحه را حول محور کانونی FF' دوران می دهیم. اگر یک موقعیت جدید صفحه P را P₁ و موقعیت بیضی (E) در صفحه P₁ را (E₁) بنامیم، مجموع فاصله هر نقطه واقع بر بیضی (E₁) از دو نقطه ثابت F و F'، برابر 2a است؛

دوآر به معادله $\frac{x^2+z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ است. اما:

$$2a = 26 \Rightarrow a = 13.$$

$$FF' = 2f = |y_F - y_{F'}| = |5 - (-5)| = 10.$$

$$\Rightarrow f = 5 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+z^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \quad \text{معادله بیضوی}$$

اکنون نقطه‌های برخورد خط D و این بیضوی دوآر را که جوابهای مسأله هستند، تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{x^2+z^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} = t \Rightarrow x = 2t, y = 3t, z = 4t+1 \end{cases}$$

$$\frac{4t^2 + (4t+1)^2}{144} + \frac{9t^2}{169} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{20t^2 + 8t + 1}{144} + \frac{9t^2}{169} = 1$$

$$4676t^2 + 1352t - 24167 = 0 \Rightarrow t_1 = \dots, t_2 = \dots$$

این معادله دو جواب دارد؛ بنابراین دو نقطه، جواب مسأله است.

مثال ۳. معادله فصل مشترک بیضوی دوآر به معادله $\frac{x^2+y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ با صفحه‌های: الف. $x = 3$ ؛ ب. $y = -2$ ؛ ج. $z = 2$ به دست آورید. حل. الف.

$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{9+y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{256} = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-f)^2 + y^2 + z^2 =$$

$$2a^2 + (x-f)^2 + y^2 + z^2 - 2a\sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow -2fx - 2a^2 = -2a\sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f \cdot x}{a} + a = \sqrt{(x+f)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f^2 \cdot x^2}{a^2} + a^2 + 2fx = x^2 + f^2 + 2fx + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow (a^2 - f^2)x^2 + a^2(y^2 + z^2) = a^2(a^2 - f^2),$$

$$a^2 - f^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2(y^2 + z^2) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(y^2 + z^2)}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

بنابراین می‌توان گفت مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت $F(-f, 0, 0)$ و $F(f, 0, 0)$ مقدار ثابت

$2a$ است. بیضوی دوآر به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ است که $b^2 = a^2 - f^2$ است.

مثال ۱. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه $F(4, 0, 0)$ و $F'(-4, 0, 0)$ برابر ۱۰ باشد. حل. این مکان هندسی بیضوی دوآری است که F و F' کانونها و ۱۰، عدد ثابت آن است. بنابراین داریم:

$$FF' = 2f = |x_F - x_{F'}| = |4 - (-4)| = 8 \Rightarrow f = 4$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2 + z^2}{9} = 1$$

مثال ۲. روی خط $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ نقطه‌ای تعیین کنید

که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه $F(0, 5, 0)$ و $F'(0, -5, 0)$ برابر ۲۶ باشد.

حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه داده شده F و F' ، برابر عدد ثابت ۲۶ است، یک بیضوی

فصل مشترک یک بیضی است.

ب.

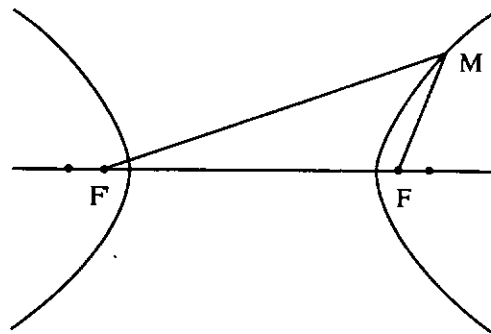
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 = 25 \Rightarrow a = c = 5,$$

$$b^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow b = \frac{5}{4}, \quad O'(2, -1, 0) \quad \text{مرکز تقارن}$$

۱۴. هذلولی

هذلولی، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانونها، و مقدار ثابت را عدد ثابت هذلولی می‌نامند. فاصله بین دو کانون را که اندازه ثابتی دارد، فاصله کانونی هذلولی نامیده و به $2c$ یا $2f$ نشان می‌دهند.



اگر M نقطه‌ای متعلق به هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ باشد، $|MF' - MF| = 2a$ یا $MF' - MF = \pm 2a$ است. MF' و MF شعاع حاملهای نقطه M نامیده می‌شوند. هذلولی دو شاخه متمایز دارد که یکی را شاخه کانون F و دیگری را شاخه کانون F' می‌نامند.

تعریف هذلولی، نشان می‌دهد که هذلولی دارای نقطه بی‌نهایت دور است.

خروج از مرکز هذلولی. اگر M نقطه‌ای دلخواه از هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ باشد، داریم:

$$FF' > |MF' - MF| \Rightarrow 2c > 2a \Rightarrow c > a \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$$

را خروج از مرکز هذلولی نامیده و به e نمایش می‌دهند:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{4}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{336} = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

فصل مشترک یک بیضی است.

ب.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{4}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{21}{25} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{70}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{70}{4} \\ z = 2 \end{cases}$$

این فصل مشترک، یک دایره است.

نکته. فصل مشترک این بیضوی دوار:

الف. با هر صفحه $x = k_1$ ($-5 < k_1 < 5$) یک بیضی است.

ب. با هر صفحه $y = k_2$ ($-5 < k_2 < 5$) یک بیضی است.

پ. با هر صفحه $z = k_3$ ($-4 < k_3 < 4$) یک دایره است.

ت. با هر یک از صفحه‌های $x = 5$ ، $x = -5$ ، $y = 5$ ، $y = -5$ ، $z = 4$ و $z = -4$ یک نقطه است.

مثال ۴. مختصات مرکز و نیمه قطره‌های بیضوی دوار به معادله

$$x^2 + 16y^2 + z^2 - 4x + 32y - 5 = 0 \quad \text{را تعیین کنید.}$$

حل. داریم:

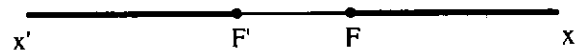
$$x^2 - 4x + 16(y^2 + 2y) + z^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - 4 + 16[(y+1)^2 - 1] + z^2 - 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + 16(y+1)^2 + z^2 = 25$$

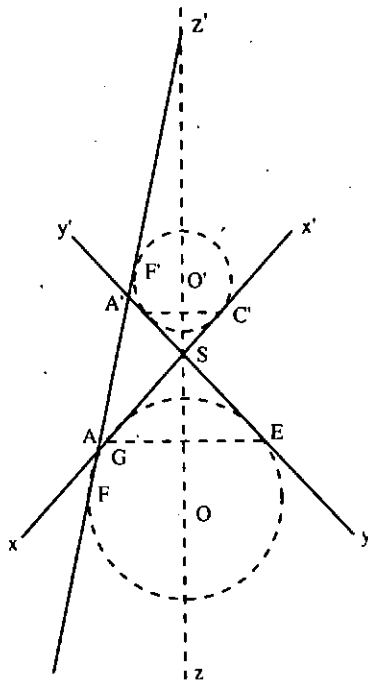
$e = \frac{c}{a} > 1$. خروج از مرکز هذلولی، همواره از ۱ بزرگتر است.

در صورتی که $e = 1$ باشد، $\frac{c}{a} = 1$ یا $c = a$ یا $c = \frac{1}{2}a$ خواهد بود. در این صورت، هذلولی به دو نیمخط Fx و $F'x'$ از خط راست FF' تبدیل می شود (شکل).



قضیه داندلن. اگر صفحه P ، مولدهای سطح مخروطی دوار به رأس S ، مولد Δ و محور D را در دو طرف رأس قطع کند، فصل مشترک یک هذلولی است.

اثبات به روش هندسی. صفحه Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوار مرور می دهیم که بر صفحه P عمود باشد و آن را صفحه شکل می نامیم. آن گاه سطح مخروطی دوار و صفحه P را



چون صفحه P سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس S قطع کرده است، خط d ضلع Sx را در نقطه A ، و Sy' امتداد ضلع Sy را در نقطه A' قطع می کند. دو دایره رسم می کنیم که بر خط d در نقطه های F و F' بر ضلعهای زاویه xSy و امتداد آنها، در نقطه های E, G و E', G' مماس شوند. از دوران این دو دایره حول محور Sz ، دو کره به وجود می آید که در نقطه های F و F' بر صفحه قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و $E'G'$ بر سطح مخروطی دوار مماسند. در مثلث ASA' داریم:

$$AF = AG = A'F' = A'E'$$

اگر M یکی از نقطه های مقطع T و T' نقطه های برخورد مولد SM با دو دایره تماس باشند، $MF = MT$ ؛ زیرا هر دو مماسهایی هستند که از M بر کره (O) رسم شده اند و $MF' = MT'$ ، به دلیل آن که هر دو مماسهایی هستند که از M بر کره (O') رسم شده اند؛ پس:

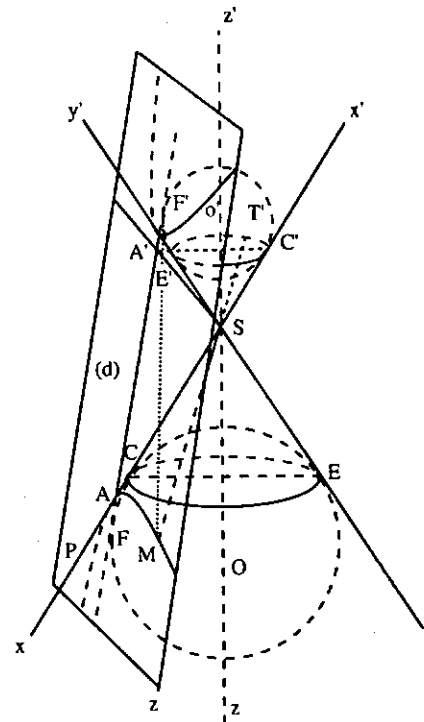
$$MF' - MF = MT' - MT = TT' = GG' =$$

$$AG' - AG = AF' - AF = AF' - A'F' = AA'$$

و با فرض $AA' = 2a$ ، خواهیم داشت:

$$MF' - MF = 2a$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه M ، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ یا رأسهای A و A' است.



بر صفحه شکل تصویر می کنیم. تصویر صفحه P بر صفحه شکل و مقطع آن با صفحه مذکور، خط d و تصویر سطح مخروطی دوار بر صفحه شکل و فصل مشترک آن با آن صفحه، زاویه xSy و زاویه متقابل آن $x'Sy'$ می باشد.

دست می آوریم.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x^2 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 + z^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - z^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

معادله به دست آمده یک هذلولی را مشخص می کند.



ادب ریاضی

حساب احتمالات در واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمد است. این حساب چیزی را که صاحبان فکر بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی یابند، با دقت و صحت بیان می دارد. این علم که با ملاحظات مربوط به بازبهای شانس و تصادف به وجود آمد، امروزه آنچنان اهمیتی یافته است که از مهمترین مسائل معرفت آدمی به شمار می آید.

پییر سیمون لاپلاس

نکته. فصل مشترک صفحه دایره تماس کره (O) و صفحه تماس کره (O') با صفحه P، دو خط راست δ و δ' می باشند که برترب خطهای هادی نظیر کانونهای F و F' نامیده می شوند. خطهای هادی ویژگی زیر را دارند:

نسبت فاصله هر نقطه هذلولی از یک کانون به فاصله آن نقطه

از خط هادی نظیر آن کانون، مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ است.

این ویژگی را، با توجه به این که در هذلولی $\varphi < \alpha$ است (φ زاویه خط d با محور سطح مخروطی دوار و α نصف زاویه رأس سطح مخروطی دوار است)، ثابت کنید.

اثبات به روش تحلیلی. می دانیم معادله سطح مخروطی دوار

حاصل از دوران خط $D: \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$ حول خط

$$\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ به صورت}$$

$$\begin{aligned} & [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] \cos^2 \alpha \\ & = [a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)]^2 \end{aligned}$$

است، که در آن، α زاویه بین دو خط D و Δ است. حال اگر صفحه P به معادله $Ax + By + Cz + D = 0$ را چنان اختیار کنیم که هر دو دامنه سطح مخروطی دوار را قطع کند، با تعیین معادله تقاطع، ثابت می شود که مقطع یک هذلولی است.

مطلب را برای مقطع سطح مخروطی دوار حاصل از دوران

$$\text{خط } \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ حول محور } x \text{ ها و صفحه } P: y = 4 \text{ ثابت}$$

می کنیم. نخست معادله این سطح مخروطی دوار را به دست می آوریم. داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ x = n \\ y - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2n \Rightarrow n^2 + 4n^2 + 0 = m \Rightarrow m - 5n^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 5x^2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 - 4x^2 = 0$$

معادله سطح مخروطی دوار
حال مقطع این سطح مخروطی دوار با صفحه $P: y = 4$ را به