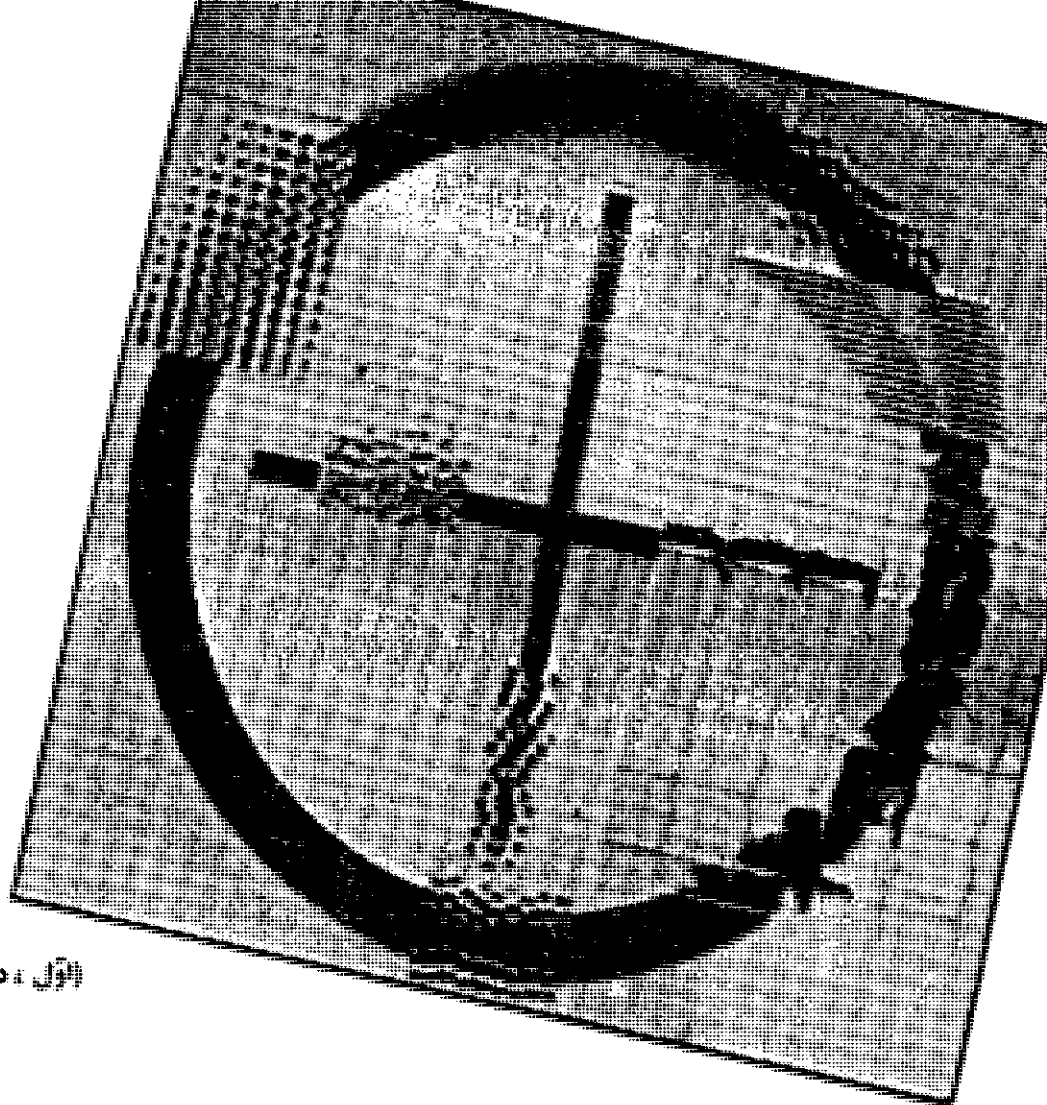


مکان هندسی

(قسمت سیزدهم)

● محمد هاشم رستمی

(اول : دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)



و یا :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

از مقایسه رابطه های (۱) و (۲) داریم :

$$2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k^2$$

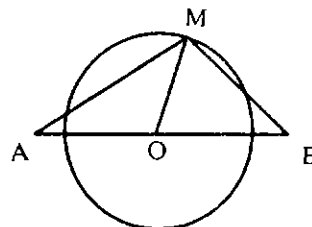
$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - a^2} \quad (3)$$

با توجه به ثابت بودن نقطه O و مقدارهای k و a ، رابطه (۳) نشان می دهد که مکان هندسی نقطه M دایره ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - a^2}$ است. برعکس هر نقطه روی دایره بالا انتخاب کنیم، مجموع مربعات فاصله اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k^2 است. بحث. شرط امکان مسئله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا

$k^2 \geq \frac{a^2}{2}$ باشد. در این صورت :

۹. مکان هندسی نقطه ای از صفحه که مجموع مربعات فاصله اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k^2 باشد، دایره ای به مرکز وسط پاره خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطه O وسط پاره خط AB و $AB = a$ و M نقطه ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم :



$$MA^2 + MB^2 = k^2 \quad (1)$$

در مثلث MAB، پاره خط MO میانه نظیر ضلع AB است و بنا به رابطه میانه ها در مثلث، می توان نوشت :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

این صورت با فرض $AB = a$ ، $A(-\frac{a}{\gamma}, 0)$ و $B(\frac{a}{\gamma}, 0)$ خواهد بود. اگر $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر k^2 است، داریم:

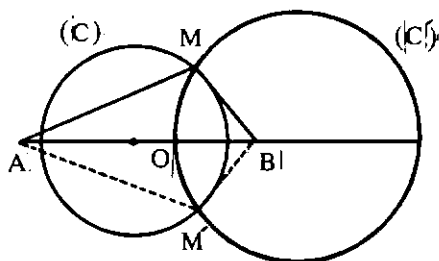
$$MA^2 \neq MB^2 = k^2 \quad \text{و} \quad B(\frac{a}{\gamma}, 0) \quad \text{و} \quad A(-\frac{a}{\gamma}, 0) \quad \text{و} \quad M(x, y)$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{\gamma})^2 + y^2 + (x - \frac{a}{\gamma})^2 + y^2 = k^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = k^2 - \frac{a^2}{\gamma^2} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{\gamma^2}(2k^2 - a^2)} \quad (1)$$

معادله (۱)، معادله دایره‌ای است که مرکز آن نقطه O وسط پاره خط AB و شعاع آن $R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بنابراین بحث جواب مسأله همانند روش هندسی است.

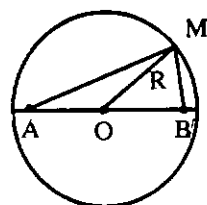
مثال ۱. دو نقطه A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله‌اش از همین دو نقطه برابر k' باشد.



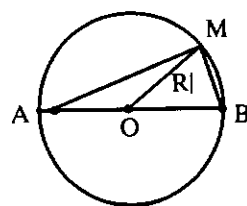
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 است، دایره‌ای است به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایره (C)). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k' باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، دایره (C') . این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

مثال ۲. سه نقطه A ، B و C غیر واقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه B و C برابر k^2 و از دو نقطه A و B نیز به یک فاصله باشد.

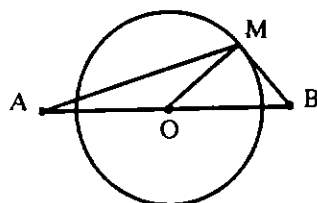
۱. اگر $k^2 > a^2$ باشد، $R > \frac{a}{\gamma}$ و در نتیجه دو نقطه A و B درون دایره مکان واقع می‌شوند.



۲. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = \frac{a}{\gamma}$ و دایره مکان از دو نقطه A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت دایره مکان دایره به قطر پاره خط AB است.



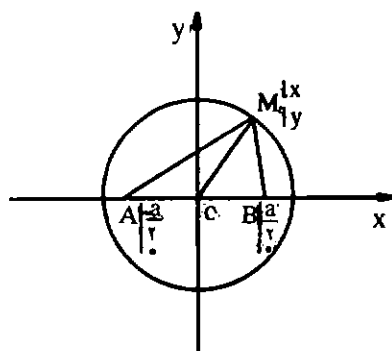
۳. اگر $\frac{a^2}{\gamma^2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{\gamma}$ و دو نقطه A و B در برون دایره مکان قرار می‌گیرند.



۴. اگر $k^2 = \frac{a^2}{\gamma^2}$ باشد، $R = 0$ و در نتیجه تنها نقطه O وسط پاره خط AB جواب مسأله است.



اثبات به روش تحلیلی. خط AB را محور x ها و عمود منصف پاره خط AB را محور y ها اختیار می‌کنیم. در



مثال ۴. دو نقطه $A(-1, 3)$ و $B(2, -1)$ در دستگاه مختصات xOy مفروضند. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی خواسته باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= 17 \text{ و } M(x, y) \text{ و } A(-1, 3) \text{ و } B(2, -1) \\ \Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 17 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y &= 2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 2y - 1 &= 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $O_1(\frac{1}{2}, 1)$ و به شعاع $R = \frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره‌ای به مرکز وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. بنابراین معادله این دایره را نوشته، نقطه یا نقاط برخورد آن، با خط Δ را به دست می‌آوریم.

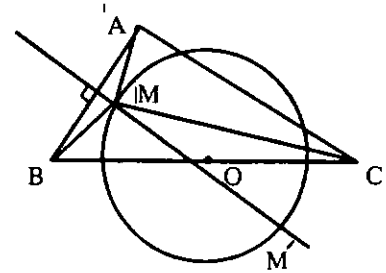
$$\begin{aligned} M(x, y) \quad A(-2, 1) \quad B(2, 1) \\ MA^2 + MB^2 &= 16 \\ \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 16 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4y &= 6 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

معادله دایره مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

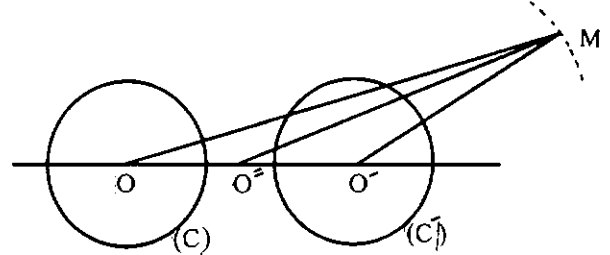
$$\Rightarrow M_1 \begin{vmatrix} 2\sqrt{5} \\ 5 \\ 4\sqrt{5} \\ 1 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{vmatrix} \quad M_2 \begin{vmatrix} -2\sqrt{5} \\ 5 \\ 4\sqrt{5} \\ 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{vmatrix}$$

نقطه‌های جواب مسأله.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - BC^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است عمود منصف پاره خط AB است. این مکان را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است.

مثال ۳. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوت‌های آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد.

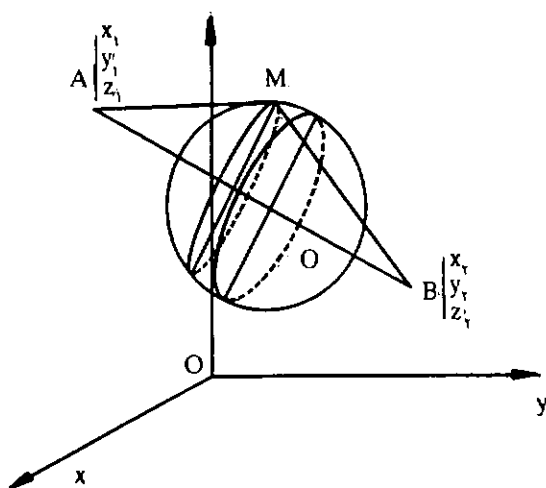


حل. فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد یعنی داشته باشیم:

با توجه به این که $PA(C) = MO^2 - R^2$ و $PA(C') = MO'^2 - R'^2$ است. با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} MO^2 - R^2 + MO'^2 - R'^2 &= k \\ \Rightarrow MO^2 + MO'^2 &= k + R^2 + R'^2 \end{aligned} \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که مجموع مربعات فاصله نقطه M از دو نقطه ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $k^2 + R^2 + R'^2$ است. بنابراین مکان هندسی این نقطه دایره‌ای به مرکز وسط پاره خط OO' و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k + R^2 + R'^2) - OO'^2}$ است.



$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Rightarrow$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (x - x_2)^2 +$$

$$(y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = k^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x(x_1 + x_2) - 2y(y_1 + y_2) -$$

$$2z(z_1 + z_2) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = k^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y - (z_1 + z_2)z =$$

$$k^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{2k^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}{4} \quad (1)$$

معادله (۱) معادله کره‌ای به مرکز

$$O_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \text{ و به شعاع}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2} \text{ است.}$$

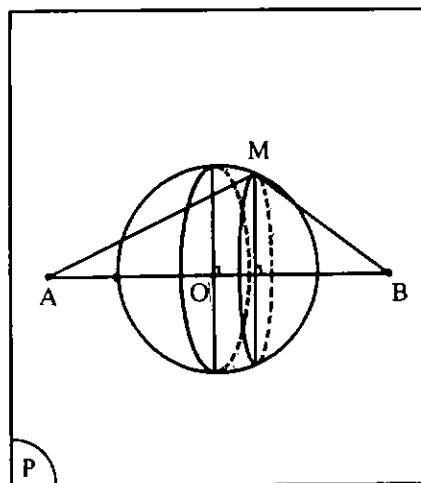
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله (۱) صدق کند مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ برابر مقدار ثابت k^2 است.

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - AB^2}$ است.

مثال ۱. صفحه P و دو نقطه A و B غبرواقع بر این صفحه مفروضند. مجموعه نقطه‌هایی از صفحه P را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌شان از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 باشد.

۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت k^2 است، کره‌ای است که مرکزش وسط پاره خط AB است.

اثبات به روش هندسی. صفحه دلخواه P را که بر دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد در نظر می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره (C) به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - AB^2}$ است.



این دایره را رسم می‌کنیم. واضح است که برای هر نقطه M واقع بر دایره (C) داریم: $MA^2 + MB^2 = k^2$. حال صفحه P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایره (C) واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحه P ، مکان هندسی نقطه‌ای است که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر k^2 است، کره‌ای به قطر پاره خط AB پدید می‌آید، که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطه ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 باشد، داریم:

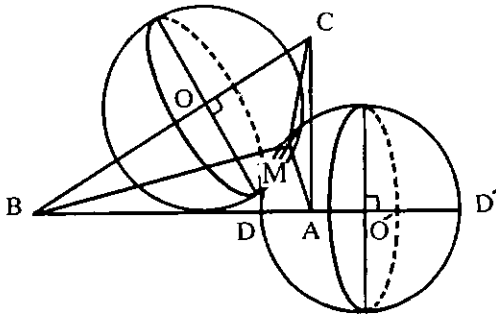
$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ و } B(x_2, y_2, z_2) \text{ و } M(x, y, z)$$

$$\Rightarrow MA^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \text{ و}$$

$$MB^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحه P (در صورت وجود) جواب مسأله است. بر حسب اندازه k^2 و طول ضلعهای چهارضلعی می‌توان وجود جواب را بررسی کرد.

مثال ۳. سه نقطه A, B و C مفروضند. مجموعه نقاطی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطه A و B برابر k و مجموع مربعات فاصله‌شان از دو نقطه B و C برابر k'^2 باشد. حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر k است، کره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند (کره آپولونیوس). این کره را رسم می‌کنیم (کره S). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت B و C برابر k'^2 است کره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k'^2 - BC^2}$ است (کره S'). این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو کره (در صورت وجود) جواب مسأله است.



مثال ۴. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت $A(1, 0, 2)$ و $B(3, -1, 0)$ برابر ۲۳ باشد. حل. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

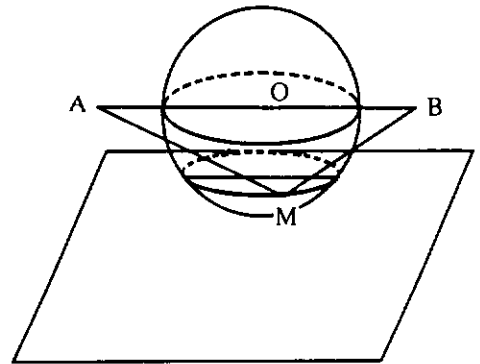
$$A(1, 0, 2) \text{ و } B(3, -1, 0) \text{ و } M(x, y, z)$$

$$MA^2 + MB^2 = 23$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 23$$

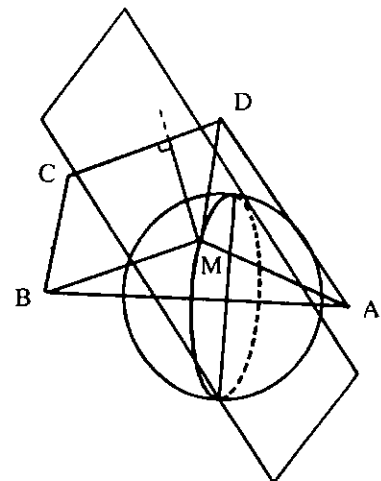
$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 4z + 15 = 23$$

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحه P (در صورت وجود) جواب مسأله است. بنا به مقدار k و وضع پاره خط AB نسبت به صفحه P می‌توان وجود جواب را بررسی نمود.



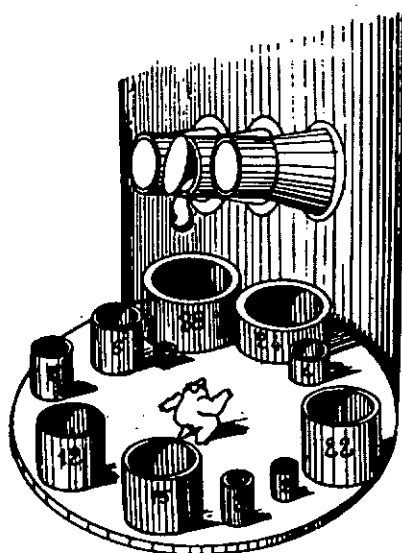
مثال ۲. چهارضلعی چپ ABCD (چهارضلعی‌ای که رأسهایش در یک صفحه قرار ندارند) مفروض است. مجموعه نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند و مجموع مربعات فاصله‌شان از دو نقطه C و D برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه ثابت C و D به یک فاصله است، صفحه عمود منصف پاره خط AB است. این صفحه را رسم کرده آن را صفحه (P) می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعات





تاجری ۱۰ مخزن دارد که گنجایش آنها ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۲، ۱۵، ۲۲، ۲۳ و ۳۸ لیتر است. هر کدام از این ظرفها پراز مایعات مختلف زیر است. بعضی پراز شیر، بعضی پراز آب و برخی پراز روغن هستند و فقط یک مخزن خالی است. مقدار آب موجود در مخزنها دو برابر مقدار شیر، و مقدار روغن، دو برابر مقدار آب است. هر مخزن از چه موادی پر شده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z-1)^2 = \frac{37}{4} \quad (1)$$

معادله (۱) معادله کره‌ای به مرکز $O_1(2, -\frac{1}{2}, 1)$ (که همان

وسط پاره خط AB است) و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{37}$ می‌باشد.

مثال ۵. دو نقطه $A(2, -1, 3)$ و $B(-2, 1, 1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ داده شده‌اند. نقطه‌ای بر خط Δ بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۴۰ باشد. حل. معادله مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۴۰ است می‌نویسیم و با معادله خط Δ قطع می‌دهیم. داریم:

$$A(2, -1, 3) \text{ و } B(-2, 1, 1) \text{ و } M(x, y, z)$$

$$MA^2 + MB^2 = 40$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 + (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8z + 20 = 40$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 10 = 0 \quad (S)$$

$$\Delta: \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z-2 = t \Rightarrow x=2t, y=3t, z=t+2 \\ (S): x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4t^2 + 9t^2 + (t+2)^2 - 4(t+2) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 14t^2 - 14 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$\Rightarrow M_1(2, 3, 3) \text{ و } M_2(-2, -3, 1)$$

نقطه‌های جواب مسأله.

