

مکان هندسی

(قسمت سوم)

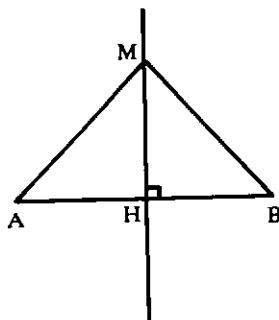
محمد هاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحب نظران درخواست می شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجله ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می شود.

مثلاً در مسأله سه نقطه ثابت وجود داشته باشد، و یا سه خط ثابت، و یا یک نقطه و یک صفحه ثابت و... که فعلاً از ذکر آنها خودداری می کنیم.

اینک به معرفی مکانهای هندسی مهم و ذکر کاربردهایی از آنها می پردازیم و مسأله هایی در ارتباط با مکانهای هندسی مطرح می کنیم.

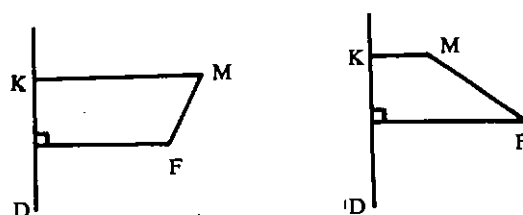
۱- مکان هندسی نقطه ای که از دو سر پاره خط مفروض AB به یک فاصله باشد، عمود منصف آن پاره خط است. یعنی: اگر نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB قرار داشته باشد، فاصله اش از دو نقطه A و B به یک اندازه است ($MA = MB$). و به عکس هر نقطه ای که به یک فاصله از دو نقطه A و B باشد، روی عمود منصف پاره خط AB واقع است.



۵- در مسأله یک نقطه ثابت مانند F و یک خط ثابت مانند D وجود دارد.

الف- اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصله اش از نقطه ثابت F مساوی فاصله اش از خط ثابت Δ باشد، ($MF = MK$)، مکان هندسی نقطه M یک سهمی به کانون F و خط هادی Δ است.

ب- اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله اش از نقطه F به فاصله اش از خط Δ مقدار ثابت 1 باشد ($\frac{MF}{MK} = 1$)، مکان هندسی نقطه M بنابر آنکه $e < 1$ یا $e > 1$ باشد، به ترتیب بیضی یا هذلولی است.



تصوره: در تعیین مکانهای هندسی حالتی دیگری نیز وجود دارد

$$m/AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{و} \quad m/\Delta = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow$$

$$m/AB \cdot m/\Delta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = -1 \Rightarrow \Delta \perp AB$$

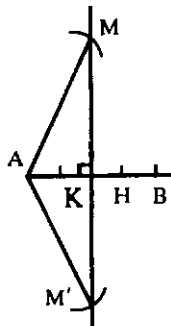
به عکس ثابت می شود هر نقطه ای که مختصاتش در معادله (۱) صدق می کند، از دو نقطه A و B به یک فاصله می باشد.
پس: مکان هندسی نقطه ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است عمودمنصف پاره خط AB است.

تبصره: باید توجه داشت که کمترین فاصله نقطه های واقع بر عمود منصف یک پاره خط، یا بر صفحه عمودمنصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط همواره برابر $\frac{AB}{2}$ است. یعنی برای هر نقطه M از مکان فوق داریم $MA \geq \frac{AB}{2}$.

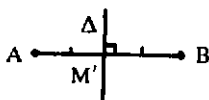
مثال ۱: پاره خط AB به طول ۸ سانتی متر مفروض است. چند نقطه روی عمود منصف پاره خط AB وجود دارد که:
الف - از دو نقطه A و B به فاصله ۶ سانتی متر باشد.
ب - از دو نقطه A و B به فاصله ۴ سانتی متر باشد.
ج - از دو نقطه A و B به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

حل - چون $\frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ است. پس:

الف - چون $\frac{AB}{2} = 4 < 6 = MA = MB$ ، پس دو نقطه روی عمودمنصف پاره خط AB وجود دارد که از نقاط A و B به فاصله ۶ سانتی متر واقع اند.

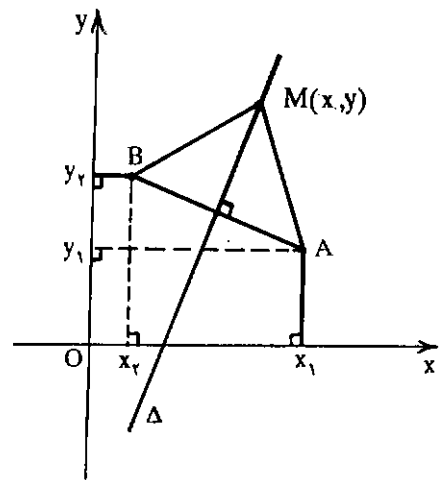


ب - چون $\frac{AB}{2} = 4 = MA = MB$ است، پس فقط یک نقطه روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد که از نقاط A و



اثبات به روش تحلیلی:

فرض می کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد. اگر $M(x, y)$ را یک نقطه از مکان هندسی فوق در نظر بگیریم، داریم: $MA = MB$



پس:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y$$

$$+ x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \quad (1)$$

معادله بالا، معادله یک خط راست مانند Δ است که:

اولاً - از نقطه $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ وسط پاره خط AB می گذرد زیرا مختصات نقطه M در این معادله صدق می کند.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$2(x_2 - x_1)\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right] + 2(y_2 - y_1)\left[\frac{y_1 + y_2}{2}\right] + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

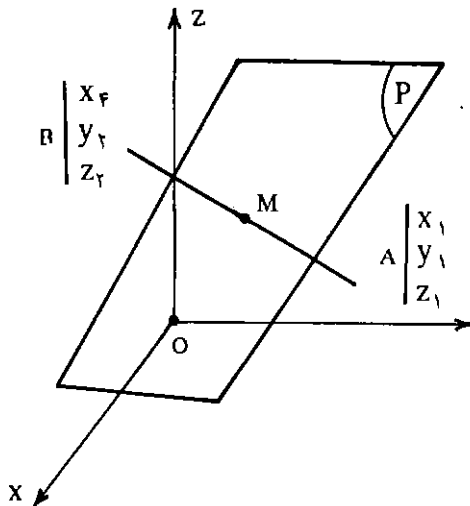
$$\Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

ثانیاً - بر خط AB عمود است، چون:

$$\sqrt{(x - \circ)^T + (y - \P)^T} = \sqrt{(x + \P)^T + (y - \circ)^T}$$

حل - نقاط A و B و C را به هم وصل می‌کنیم آنگاه عمود منصف پاره خط AB همچنین عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌نماییم، نقطه برخورد این دو عمود منصف نقطه O جواب

صفحه عمود منصف پاره خط AB، فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} MA = MB &\Rightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \\ &\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z \\ &+ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

معادله (۱) معادله صفحه‌ای است که از نقطه $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ وسط پاره خط AB می‌گذرد (مختصات نقطه M در معادله (۱) صدق می‌کند)، و بر بردار $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ عمود است. بنابراین معادله صفحه عمود منصف پاره خط AB است. به عکس به سادگی ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در رابطه (۱) صدق کند از دو نقطه A و B به یک فاصله است.

مثال ۱: دو نقطه A و B و خط Δ غیر واقع در یک صفحه مفروضند. روی خط Δ نقطه‌ای مانند C چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی الساقین باشد.

حل - چون $CA = CB$ است پس نقطه O روی صفحه

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 + 16 - 8y &= x^2 + 4x + 4 + y^2 \Rightarrow 4x + 8y - 12 = 0 \Rightarrow \\ x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

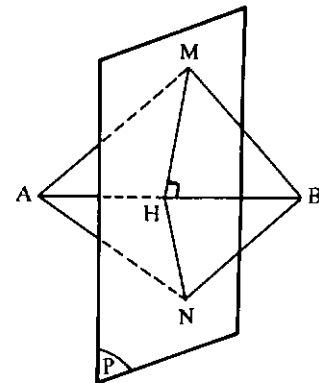
معادله عمود منصف پاره خط AB

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + 2x^2 - 4x - 6 - 3 &= 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ و } x = -\frac{3}{2} \\ \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0 \text{ و } x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{4} &\Rightarrow M_1(3, 0) \text{ و } M_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

نقاط جواب مسئله

۲- مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشد، صفحه عمود منصف پاره خط AB است. (صفحه‌ای که از نقطه H وسط پاره خط می‌گذرد و بر AB عمود است.)



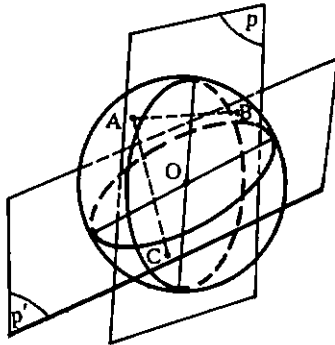
زیرا اگر M نقطه‌ای از صفحه عمود منصف پاره خط AB باشد و از M به نقاط A و B وصل کنیم، در مثل MAB، پاره خط MH عمود منصف پاره خط AB است پس مثل MAB متساوی الساقین و در نتیجه $MA = MB$ است.

به عکس هر نقطه‌ای مانند N که به یک فاصله از دو نقطه A و B باشد، روی صفحه عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. زیرا اگر از N به H وصل کنیم، در مثل متساوی الساقین NAB، پاره خط NH میانه نظیر قاعده است. پس عمود منصف قاعده نیز می‌باشد. در نتیجه نقطه N روی صفحه‌ای قرار دارد که در نقطه H بر پاره خط AB عمود گردیده است یعنی روی صفحه عمود منصف پاره خط AB واقع است.

اثبات به روش تحلیلی:

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد، برای نوشتن معادله

مسأله ۵- سه نقطه A و B و C روی یک کره واقع اند. نقطه ای از این کره را بیابید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد.



حل - صفحه عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم. این صفحه کره را در دایره عظیمه (C) قطع می کند. صفحه عمود منصف پاره خط AC را نیز رسم می کنیم. این صفحه کره را در دایره عظیمه (C') تلاقی می نماید. نقطه های برخورد این دو دایره (C) و (C'). جوابهای مسأله اند (دو جواب). اگر یکی از این دو نقطه را M بنامیم، داریم $MA = MB = MC$.

مثال ۴: اگر A (۱ - ۲ و ۰) و B (۱ و ۱ و ۰) باشد معادله صفحه عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

حل: راه اول - در معادله (۱) به جای مختصات نقاط A و B مقدار می گذاریم:

$$2(0 - 1)x + 2(1 + 2)y + 2(-1 - 0)z + 1 + 4 + 0 - (0 + 1 + 1) = 0 \Rightarrow -2x + 6y - 2z + 3 = 0$$

راه دوم - فرض می کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از صفحه عمودمنصف پاره خط AB باشد. در این صورت داریم:

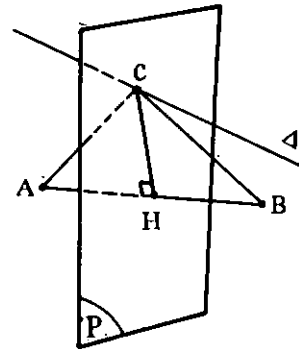
$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1}$$

$$\Rightarrow -2x + 6y - 2z + 3 = 0 \quad \text{معادله صفحه عمودمنصف پاره خط AB}$$

راه سوم - مختصات نقطه M وسط پاره خط AB (x_1 و y_1 و z_1)

عمودمنصف پاره خط AB واقع است. بنابراین برای حل مسأله، صفحه عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم. نقطه برخورد این صفحه با خط Δ ، نقطه C جواب مسأله است.

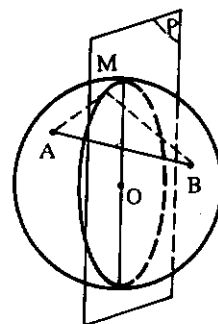


بحث: اگر صفحه عمودمنصف پاره خط AB خط Δ را در یک نقطه قطع کند (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB نباشد)، مسأله تنها یک جواب دارد. اگر صفحه عمودمنصف پاره خط AB موازی خط Δ باشد (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB باشد)، مسأله جواب ندارد.

اگر صفحه عمودمنصف پاره خط AB شامل خط Δ باشد (خط Δ روی صفحه عمودمنصف واقع شود)، مسأله بیشمار جواب دارد.

مثال ۲: دو نقطه A و B روی یک کره واقع اند. مکان هندسی نقاطی از سطح این کره را پیدا کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند.

حل - صفحه عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم. این صفحه از مرکز کره می گذرد و کره را در یک دایره عظیمه قطع می کند که این دایره عظیمه جواب مسأله است.



$$\Rightarrow \boxed{-8x + 2z - 3 = 0} \text{ معادله صفحه عمود منصف پاره خط } AB$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3} = t \Rightarrow \\ -8x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = 2t + 1, y = -2t - 2, z = 3t + 3 \Rightarrow$$

$$-8(2t+1) + 2(3t+3) - 3 = 0 \Rightarrow -10t - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow M(x=0 \text{ و } y=-1 \text{ و } z=+\frac{3}{2})$$



با وجود نبوغ بارزی که داشت مقامات مدرسه‌ای او را آرام نمی‌گذاشتند تا بتواند از میدان وسیع و بارور اکتشافات خود بهره‌برداری کند. به عکس از به کار بردن هر وسیله‌ای برای خشمگین ساختن او خودداری نمی‌کردند. یا او را به کار و کوشش بیپایان وامی‌داشتند و یا با مواظبت حکیمانه و تهیات متوالی خود روح عصیان را در وی شدت می‌بخشیدند و با همه احوال نمی‌توانستند هیچ‌گونه ایرادی بر او وارد آورند مگر عزت نفس بسیار و اراده‌ای آهنین برای این که ریاضی‌دانی بزرگ شود. در واقع در آن هنگام وی ریاضی‌دانی بزرگ بود اما آنان از این نکته غافل بوده‌اند. دو بدبختی دیگر که در سال هیجدهم زندگی برایش پیش آمد آخرین ضربات را بر خلق و خوی گالوا وارد آورد. در این سال برای بار دوم داوطلب امتحان ورودی پلی تکنیک شد و مردانی که حق لیاقت تراشیدن مدادهای او را نداشتند می‌بایست درباره کفایت او قضاوت کنند و نتیجه همان شد که می‌بایست انتظار داشت: گالوا بار دیگر رد شد و این آخرین شانس او بود و بعد از این درهای این مدرسه برای همیشه به روی او بسته می‌شد.

ریاضیدانهای نامی - حسن صفاری

و تصاویر بردار نرمال صفحه عمود منصف پاره خط AB (c و b و a) را که می‌تواند تصاویر بردار $\vec{AB}$ باشد به دست می‌آوریم و در معادله $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$ قرار می‌دهیم.

$$M \begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{AB} \begin{cases} a = x_B - x_A = 0 - 1 = -1 \\ b = y_B - y_A = 1 + 2 = 3 \\ c = z_B - z_A = -1 - 0 = -1 \end{cases}$$

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$-1(x - \frac{1}{2}) + 3(y + \frac{1}{2}) - 1(z + \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$-x + 3y - z + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{-2x + 6y - 2z + 3 = 0}$$

مثال ۵: روی خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه $A(2, 1, 1)$ و $B(-2, 1, 2)$ به یک فاصله باشد.

حل: معادله صفحه عمود منصف پاره خط AB را می‌نویسیم و نقطه برخورد این صفحه با خط D را به دست می‌آوریم.

$$M(x, y, z), A(2, 1, 1), B(-2, 1, 2), MA = MB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} =$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 =$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$$