

مکان هندسی

(قسمت دهم)

(اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

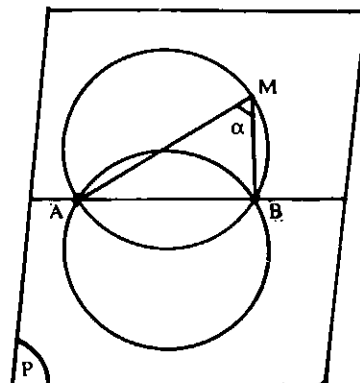
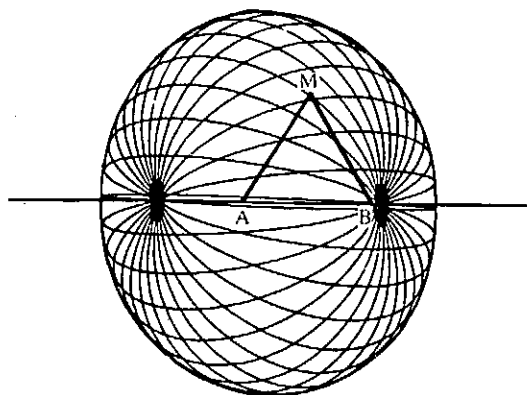
محمد هاشم رستمی



کنیم، $\widehat{AMB} = \alpha$ است. حال صفحه P را حول خط راست AB دوران می‌دهیم. در این صورت از دوران کمان در خور زاویه α یعنی از دوران کمان $\widehat{AMB}$ حول خط AB ، سطحی منحنی (رویه‌ای دوار) به وجود می‌آید که این سطح، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α دیده می‌شود.

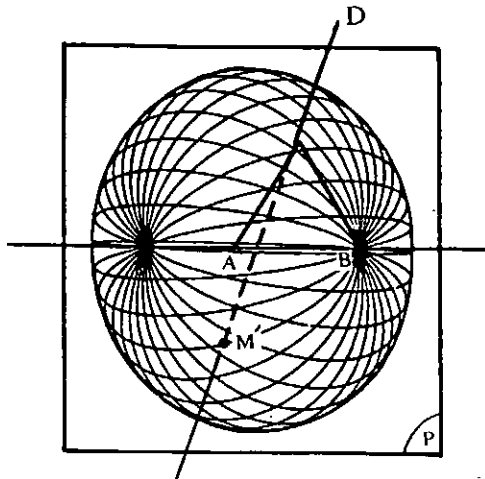
۶- مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه ثابت α دیده می‌شود، یک رویه دوار است که از دوران کمان در خور زاویه α وابسته به پاره خط AB ، حول خط AB به وجود می‌آید.

اثبات به روش هندسی — پاره خط AB را در صفحه دلخواه P در نظر می‌گیریم و مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α رؤیت می‌شود، یعنی کمان در خور زاویه α وابسته به پاره خط AB را رسم می‌کنیم.



اثبات به روش تحلیلی — دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد

واضح است که اگر نقطه M را روی این کمان در خور اختیار

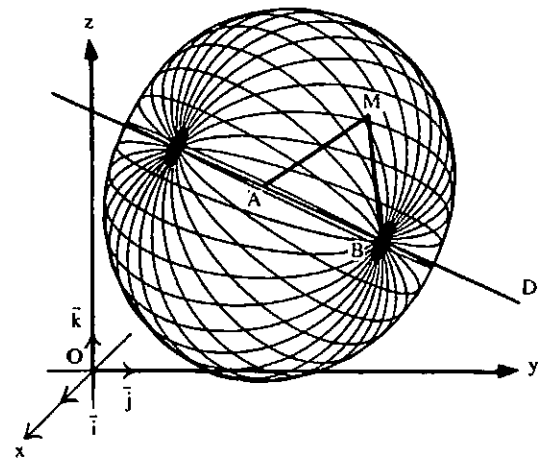
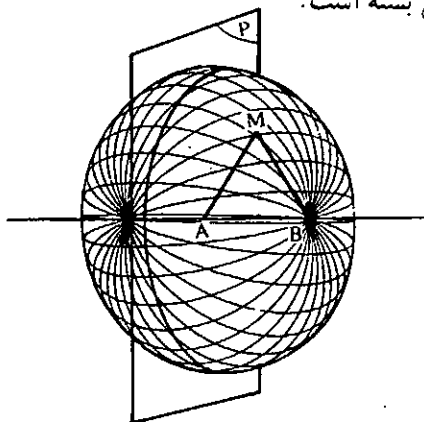


مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α رؤیت می‌شود، به دست آید. نقطه برخورد این مکان هندسی با خط D جواب مسأله است و حداکثر دو جواب وجود دارد.

نکته - اگر هر دو نقطه A و B روی خط D قرار داشته باشند، مسأله جواب ندارد.

مثال ۲ - صفحه P و دو نقطه A و B داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را تعیین کنید که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α دیده شود.

حل - مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α دیده می‌شود رسم می‌کنیم. فصل مشترک این مکان هندسی با صفحه P جواب مسأله است (منحنی C). در صورتی که صفحه P بر خط AB بگذرد جواب مسأله، کمان در خود زاویه α وابسته به پاره خط AB واقع در صفحه P است و اگر صفحه P عمود بر خط AB باشد و رویه مکان هندسی را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است و اگر صفحه نسبت به خط AB مایل باشد و رویه مکان هندسی را قطع کند، جواب یک منحنی بسته است.



نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که $\angle AMB = \alpha$ است، خواهیم داشت:

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\vec{BM}(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{AM}, \vec{BM}) = \cos \alpha =$$

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \cdot \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}}$$

$$\Rightarrow [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2] \cdot$$

$$[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2] \cos^2 \alpha$$

$$= [(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) +$$

$$(z - z_1)(z - z_2)]^2 \quad (1)$$

بعکس هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادله (۱) صدق کند، روی کمان در خور زاویه α وابسته به پاره خط AB قرار دارد. این معادله را با استفاده از ویژگی دوران منحنیها در فضا حول یک خط راست (دوران کمان در خور زاویه α حول خط AB) نیز می‌توان به دست آورد. برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها، می‌توان خط راست AB را منطبق بر یکی از محورهای دستگاه مختصات $O - xyz$ اختیار نمود.

مثال ۱ - خط D و دو نقطه A و B غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره خط AB به زاویه α دیده شود.

حل - صفحه دلخواه P را بر خط AB مرور می‌دهیم و کمان در خور زاویه α وابسته به پاره خط AB را رسم می‌کنیم. سپس، این کمان در خور را حول خط AB دوران می‌دهیم تا