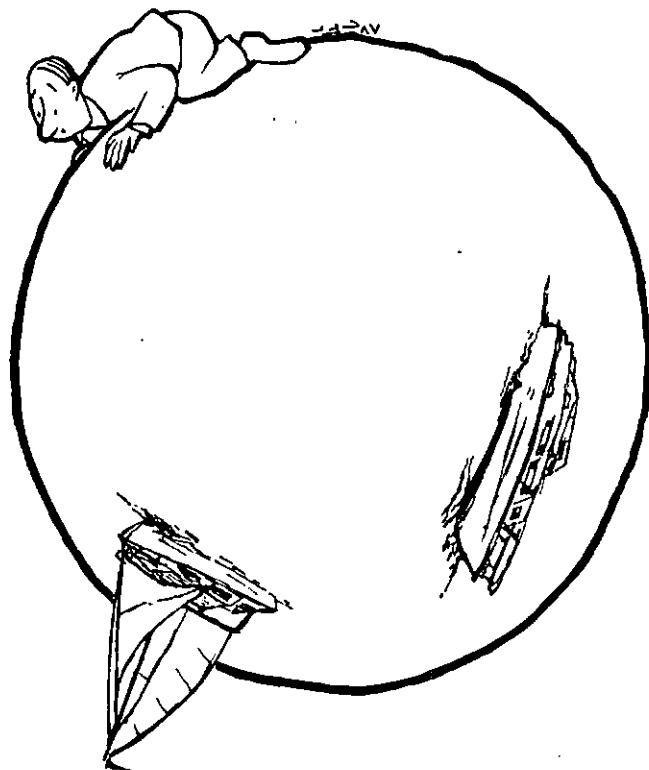


مکان هندسی

(قسمت بیستم)

معادله هذلولی

● محمد هاشم رستمی



$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 =$$

$$(x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cx}{a} - a = \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 x^2}{a^2} + a^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

با فرض $c^2 - a^2 = b^2$ داریم:

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

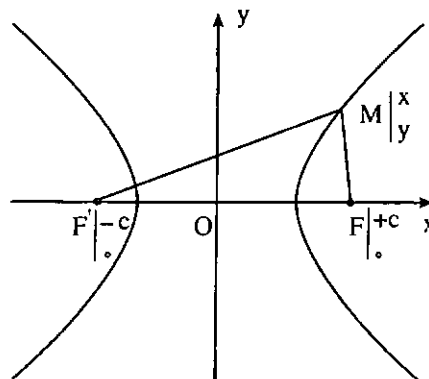
بعکس، می توان ثابت کرد نقطه هایی از صفحه، که مختصات آنها

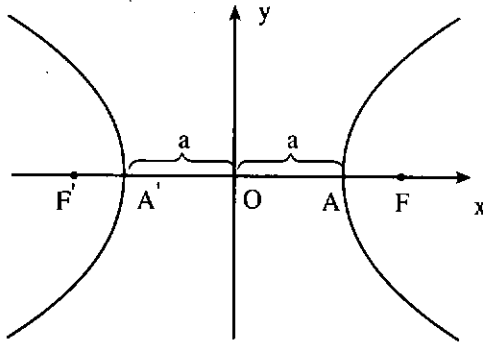
معادله هذلولی. هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ را در نظر می گیریم. محور طولها را منطبق بر FF' و محور y ها را عمود منصف پاره خط FF' اختیار می کنیم.

در این صورت $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ خواهد بود. اگر نقطه ای دلخواه از این هذلولی باشد، داریم:

$$MF' - MF = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (1)$$





بنابراین، محور کانونی هذلولی، آن را در دو نقطه A' و A قطع می‌کند؛ به قسمی که $AA' = 2a$ است. دو نقطه A' و A را رأسهای حقیقی هذلولی و پاره خط AA' را قطر قاطع هذلولی می‌نامند.

۲. هذلولی به معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ محور y ها، یعنی محور

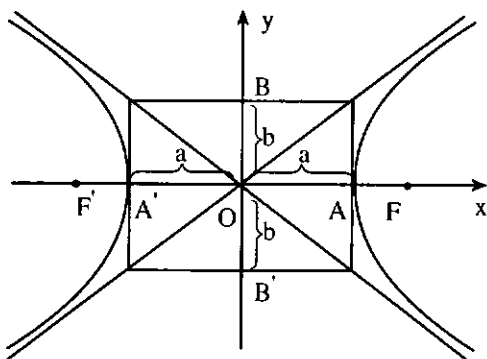
ناکانونی آن را قطع نمی‌کند؛ زیرا:

$$x=0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2 < 0.$$

به همین دلیل، محور ناکانونی هذلولی را محور غیر قاطع هذلولی می‌نامند. اما به دلیل اهمیت پارامتر b در هذلولی، دو نقطه B و B' را در دو طرف مرکز روی محور ناکانونی اختیار می‌کنند و این دو نقطه را رأسهای غیر حقیقی و پاره خط BB' را قطر غیر قاطع یا قطر غیر حقیقی هذلولی می‌نامند.

مجانبهای هذلولی. هر هذلولی، دو مجانب دارد که از مرکز آن می‌گذرند. این مجانبها قطره‌های مستطیلی هستند که مرکز منطبق بر مرکز هذلولی است و ضلعهایش برابر $2a$ و $2b$ و موازی محورهای تقارن هذلولی است. ثابت می‌شود که مجانبهای هذلولی به معادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ به معادله } y = +\frac{b}{a}x \text{ و } y = -\frac{b}{a}x \text{ می‌باشند.}$$



در معادله (۳) صدق کند، روی هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ قرار دارند؛ یعنی از رابطه (۳) می‌توان به رابطه (۱) رسید. معادله (۳) را معادله کانونیک هذلولی می‌نامند.

نکته. در هذلولی $c^2 = b^2 + a^2$ است.

شعاع حاملهای نقطه M . رابطه (۲) یک شعاع حامل نقطه

M است؛ یعنی $MF = \left| \frac{cx}{a} - a \right|$. به روش مشابه از رابطه (۱)

شعاع حامل دیگر نقطه M ، یعنی MF' برابر است با

$$MF' = \left| \frac{cx}{a} + a \right|$$

تبصره. اگر از معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، y را بر حسب x به

دست آوریم، داریم:

$$y^2 = \frac{\pm b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

دامنه این تابع $x^2 > a^2$ یا $x > +a$ و $x < -a$ است و این خود نشان می‌دهد که اولاً هذلولی، شاخه‌یی نهایت دور دارد و ثانیاً از دو شاخه متمایز تشکیل می‌شود.

محورهای تقارن و مرکز تقارن هذلولی. هذلولی به معادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ را در نظر می‌گیریم:}$$

۱. با تبدیل y به $-y$ ، معادله هذلولی تغییر نمی‌کند؛ بنابراین

محور x ها و در حقیقت FF' محور تقارن هذلولی است، که آن را محور تقارن کانونی یا به طور خلاصه، محور کانونی هذلولی می‌نامند.

۲. با تبدیل x به $-x$ ، معادله هذلولی تغییر نمی‌کند؛ پس محور

y ها یعنی عمود منصف پاره خط FF' محور تقارن هذلولی است که آن را محور تقارن ناکانونی یا به طور خلاصه، محور ناکانونی هذلولی می‌نامند.

۳. با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ ، معادله تغییر نمی‌کند؛ بنابراین

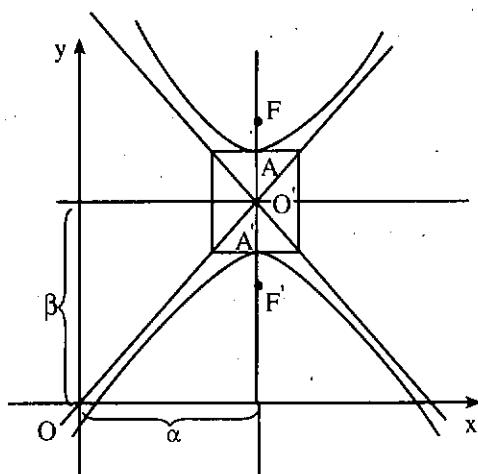
مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است که به طور خلاصه آن را مرکز هذلولی می‌نامند.

رأسهای هذلولی. ۱. نقطه برخورد هذلولی به معادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ با محور } x \text{ ها، یعنی محور کانونی آن را به دست}$$

می‌آوریم، داریم:

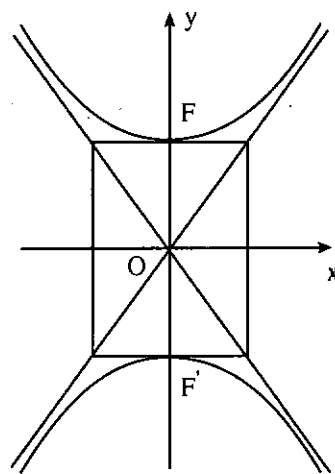
$$y=0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A \begin{pmatrix} +a \\ 0 \end{pmatrix}, A' \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$$



صورت‌های دیگر معادله هذلولی

۱. اگر محور کانونی هذلولی منطبق بر محور yها و محور ناکانونی آن منطبق بر محور طولها باشد، معادله هذلولی به صورت

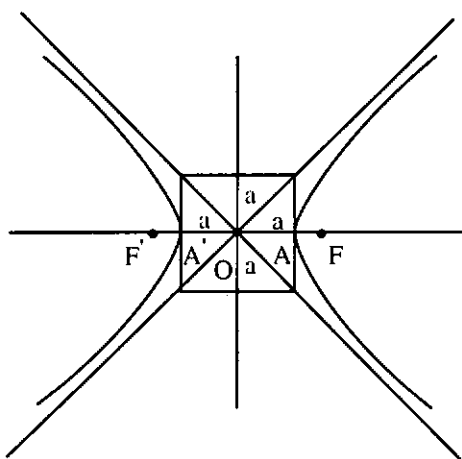
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ است.}$$



۴. اگر محورهای هذلولی غیرموازی با محورهای مختصات باشند، معادله آن به صورت کلی:

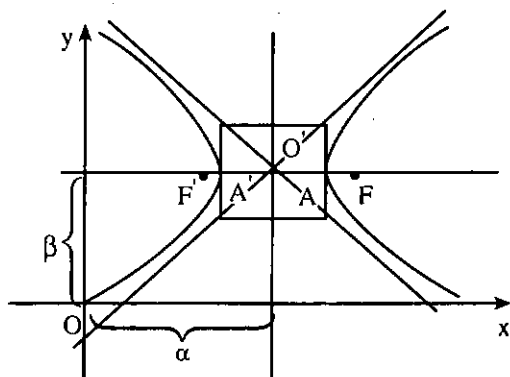
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$

است که در آن $A.C < 0$ است. این معادله را با انتقال مبدأ مختصات به مرکز تقارن هذلولی و دوران محورهای مختصات می‌توان به صورت کانونیک $AX^2 + BY^2 + CX + DY + E = 0$ تبدیل نمود.



۲. اگر مرکز هذلولی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی محور طولها باشد، معادله هذلولی به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



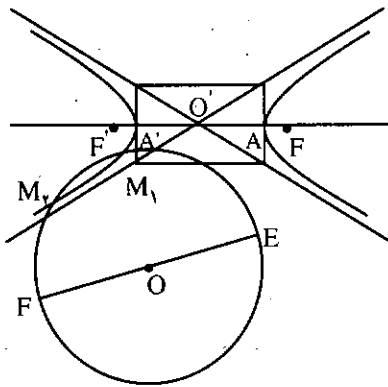
هذلولی متساوی الساقین. اگر در هذلولی، $a = b$ باشد، هذلولی متساوی الساقین یا متساوی المحورین یا متساوی القطرین نامیده می‌شود. در این هذلولی، $c^2 = 2a^2$ یا $c = a\sqrt{2}$ و معادله آن، در حالتی که محور کانونی منطبق بر محور xها و محور yها، عمود منصف FF' است، به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ و یا $x^2 - y^2 = a^2$ یا $x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$ است.

۳. اگر مرکز هذلولی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی محور عرضها باشد، معادله آن به صورت زیر است:

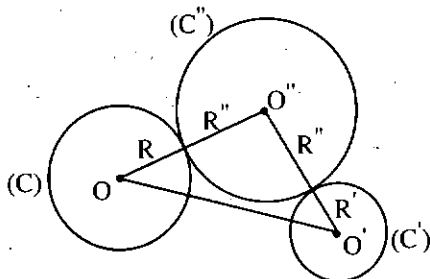
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه A و B، برابر K^2 و تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه C و D، برابر $2a$ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B، مقدار ثابت K^2 است، دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - AB^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه ثابت C و D برابر $2a$ است، یک هذلولی به کانونهای C و D و عدد ثابت $2a$ می‌باشد. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



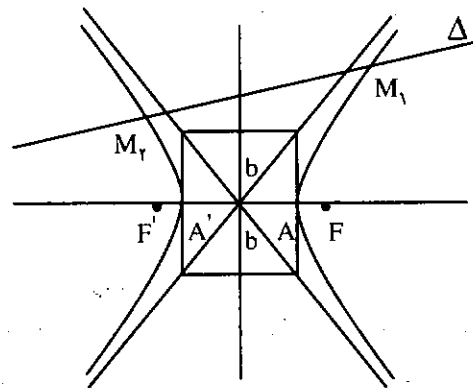
مثال ۴. مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس برون بر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را تعیین کنید.
حل. فرض می‌کنیم دایره $C''(O'', R'')$ یکی از دایره‌های مماس برون بر دو دایره داده شده باشد. از O'' به O و O' وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:



$$O''O = R + R'' \quad (1)$$

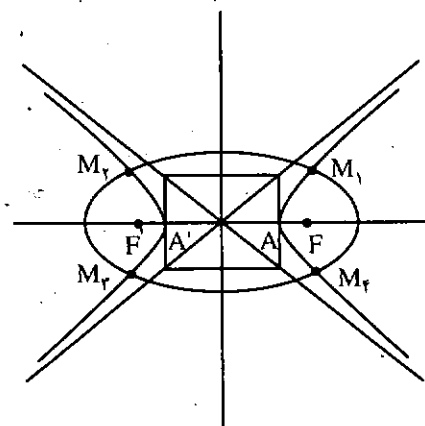
$$O''O' = R' + R'' \quad (2)$$

مثال ۱. خط Δ و دو نقطه F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه F و F'، برابر ۸ باشد.
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه ثابت F و F'، برابر ۸ است، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a=8$ است. این هذلولی را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این هذلولی با خط Δ (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



مثال ۲. دو نقطه F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را مشخص کنید که مجموع فاصله‌اش از این دو نقطه، برابر ۱۲ و تفاضل فاصله‌اش از این دو نقطه، مساوی ۸ باشد.

حل. نقطه‌های تقاطع بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۱۲، و هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۸، جوابهای مسأله‌اند و مسأله همواره داری چهار جواب است.



مثال ۳. چهار نقطه A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند.

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$MF - MF' = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \pm 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \pm 4 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2 + y^2 + 16 \pm 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$-12x - 16 = \pm 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}x - 2 = \pm \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x^2 + 4 + 6x = x^2 + 9 + 6x + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

معادله هذلولی مورد نظر

راه دوم. با توجه به این که FF' روی محور x ها و مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات است، معادله هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ است. بنابراین داریم:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$FF' = 2c = |x_F - x_{F'}| = |3 + 3| = 6$$

$$\Rightarrow c = 3, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{معادله هذلولی مورد نظر}$$

مثال ۷. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه $F(3, 5)$ و $F'(-2, 3)$ برابر ۴ است. حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۴ است که چون FF' موازی محورهای مختصات نیست، برای تعیین معادله آن، بهتر است به روش زیر عمل کنیم: فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه اختیاری از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2},$$

$$MF' = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

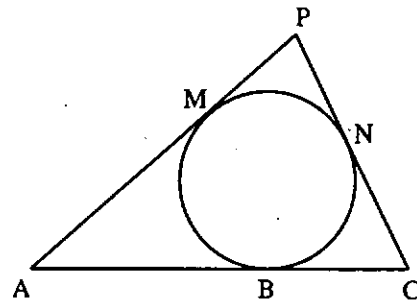
$$MF - MF' = \pm 2a$$

$$(1) - (2) \Rightarrow O''O - O''O' = (R + R'') - (R' + R'')$$

$$= R - R' = \text{مقدار ثابت}$$

چون دو نقطه O و O' ثابت و تفاضل فاصله نقطه O'' از این دو نقطه، مقدار ثابتی است، بنابراین مکان هندسی نقطه O'' ، یعنی مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس بیرون بر دو دایره (C) و (C') یک هذلولی به کانونهای O و O' و عدد ثابت $|R - R'|$ است.

مثال ۵. سه نقطه A ، B و C پشت سر هم بر خط مستقیمی قرار دارند. دایره متغیری همواره در B بر این خط مماس است. از A و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. مکان هندسی نقطه P را بیابید.



حل. نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از A و C بر دایره متغیر را به ترتیب M و N می‌نامیم. با توجه به برابریهای $MA = AB$ ، $PM = PN$ و $NC = CB$ ، داریم:

$$|PA - PB| = |(PM + MA) - (PN + NC)|$$

$$= |MA - NC| = |AB - BC|$$

با توجه به این که AB و BC ثابت می‌باشند، مقدار ثابت $|PA - PB|$ و در نتیجه مکان هندسی نقطه P ، یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت $|AB - BC|$ است. نکته. اگر نقطه B وسط پاره خط AC باشد، مکان هندسی نقطه P عمود منصف پاره خط AC است.

مثال ۶. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ برابر ۴ است. حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۴ است. برای تعیین معادله آن، به یکی از دو راه زیر عمل می‌کنیم.

راه اول. فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$7(x+4)^2 - 9(x-2)^2 - 63 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 92x + 13 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 92x - 13 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{46 \pm \sqrt{2116 + 26}}{2} = \frac{46 \pm 3\sqrt{238}}{2}$$

$$\Rightarrow M_1 \left| \begin{array}{l} x = \frac{46 + 3\sqrt{238}}{2} \\ y = \frac{-50 - 3\sqrt{238}}{2} \end{array} \right.$$

$$M_2 \left| \begin{array}{l} x = \frac{46 - 3\sqrt{238}}{2} \\ y = \frac{-50 + 3\sqrt{238}}{2} \end{array} \right.$$

مثال ۹. دو نقطه $F(4,0)$ و $F'(-4,0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطه M از این صفحه مختصات را چنان بیابید که $|MF - MF'| = 6$ و $MF^2 - MF'^2 = 96$ باشد.

حل. نقطه برخورد هذلولی به کانونهای M و N و عدد ثابت F' و F و عدد ثابت $2a=6$ ، و خط راست Δ عمود بر FF' در نقطه H به قسمی که

اگر I وسط FF' باشد، $IH = \frac{96}{2FF'}$ جواب مسأله است.

بنابراین:

$$2a=6 \Rightarrow a=3$$

$$2c = |x_F - x_{F'}| = |4 + 4| = 8 \Rightarrow c=4$$

$$c^2 = b^2 + a^2, 16 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 7, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \quad \text{معادله هذلولی}$$

$$MF^2 - MF'^2 = 96$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 - (x+4)^2 - y^2 = 96$$

$$\Rightarrow -16x = 96 \Rightarrow x = -6 \quad \Delta \text{ معادله خط}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \\ x = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{36}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{7} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \pm 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \pm 4$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 =$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + 16 \pm 8\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Rightarrow -10x - 4y + 5 = \pm 8\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Rightarrow 100x^2 + 16y^2 + 25 + 80xy - 100x - 40y =$$

$$64(x^2 + 4x + 4) + 64(y^2 - 6y + 9)$$

$$\Rightarrow 36x^2 - 48xy + 80xy - 356x + 344y - 807 = 0$$

مثال ۸. خط $\Delta: y+x+2=0$ و دو نقطه $M(2,6)$ و $N(2,-2)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که فاصله آن از دو نقطه M و N برابر ۶ باشد.

حل. نقطه برخورد هذلولی به کانونهای M و N و عدد ثابت ۶ با خط Δ ، جواب مسأله است. اما محور کانونی این هذلولی، موازی محور عرضهاست. بنابراین، معادله آن به صورت

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \quad \text{است. اما داریم:}$$

$$O' \text{ مرکز هذلولی} \left| \begin{array}{l} \alpha = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ \beta = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \end{array} \right.$$

$$O'F = c = |y_F - y_{O'}| = |6 - 2| = 4,$$

$$2a=6 \Rightarrow a=3$$

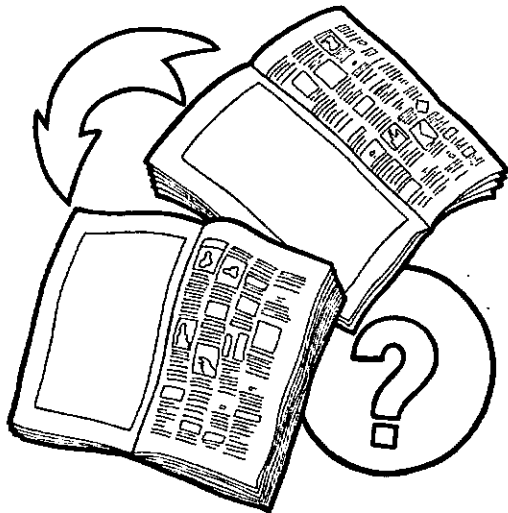
$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 16 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{7} = 1 \quad \text{از آن جا معادله هذلولی به صورت}$$

و نقطه‌های جواب مسأله، جوابهای دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{7} = 1 \\ y+x+2=0 \Rightarrow y=-x-2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 7(-x-2-2)^2 - 9(x-2)^2 = 63 \Rightarrow$$



صفحه ۷ یکی از ورقهای یک روزنامه ۶۰ صفحه‌ای، که تنها یک دوخت دارد، سفید است؛ یعنی چاپ نخورده است. صفحه‌های سفید دیگر روزنامه کدامند؟

جواب در صفحه ۸۸

$$\Rightarrow y^2 = 21 \Rightarrow y = \pm\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow M_1 \begin{vmatrix} -6 \\ \sqrt{21} \end{vmatrix}, M_2 \begin{vmatrix} -6 \\ -\sqrt{21} \end{vmatrix}$$

مثال ۱۰. مختصات مرکز، نیمه قطرها، مختصات کانونها و رأسهای هذلولی به معادله $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ را تعیین و هذلولی را رسم کنید.

حل. معادله داده شده را به صورت کانونیک در می آوریم:

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4[(x-1)^2 - 1] - 9[(y+2)^2 - 4] + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = -36$$

$$\Rightarrow \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow O'(1, -2)$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$F \begin{vmatrix} \alpha = 1 \\ \beta + c = -2 + \sqrt{13} \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} \alpha = 1 \\ \beta - c = -2 - \sqrt{13} \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} \alpha = 1 \\ \beta + a = -2 + 2 = 0 \end{vmatrix}, A' \begin{vmatrix} \alpha = 1 \\ \beta - a = -2 - 2 = -4 \end{vmatrix}$$

