

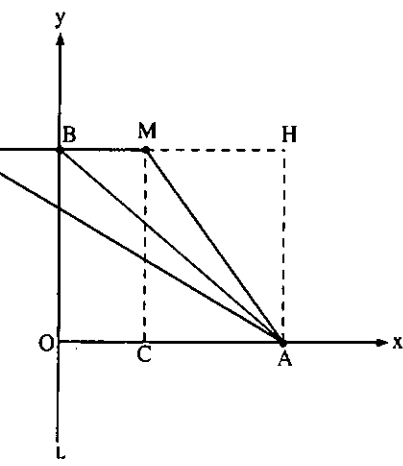
دانش آموزان گرامی، این مقاله چند مسأله مکان هندسی را مطرح می کند که با مکان های هندسی معمولی فرق دارند. در این مسائل، دو نقطه متحرک با دو شرط در نظر می گیریم و مکان هندسی دو نقطه مورد نظر را بررسی می کنیم. پس از مطالعه این مقاله کوشش کنید، مسائلی از این نوع را طرح و حل کنید.



مسأله ۲:

در صفحه P خط l و نقطه A را در نظر می گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطه متحرک M و N به طوری که:

- اولاً دو نقطه M و N نسبت به خط l قرینه باشند.
 - ثانیاً مساحت مثلث متغیر AMN برابر مقدار معلوم S باشد.
- حل: تصویر نقطه A را روی خط l با o نشان می دهیم. تصویرهای دو نقطه A و

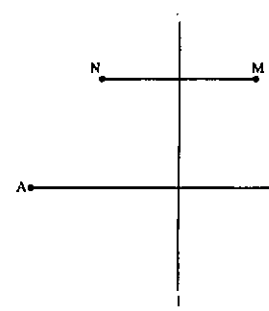


M را به ترتیب بر دو خط MN و oA، با H و C نشان می دهیم. وسط پاره خط MN را B می نامیم. چون خط AB میانه مثلث AMN است، پس مساحت مثلث AMN دو برابر مساحت مثلث ABM است. بنابراین:

$$s = 2 \left(\frac{1}{2} \overline{BM} \cdot \overline{AH} \right) = \overline{BM} \cdot \overline{MC}$$

یعنی نقطه M در صفحه P طوری حرکت می کند که حاصل ضرب فاصله های آن از دو خط عمود بر هم oA و l همواره معادل مقدار ثابت S است. پس مکان هندسی نقطه M یک هذلولی است که دو خط oA و l دو مجانب آن هستند، به طور دقیق تر می گوئیم، مکان هندسی نقطه M دو هذلولی که مجانب هریک از آن ها دو خط oA و l هستند. هریک از شاخه های دو هذلولی، در یکی از ربع های صفحه قرار دارند (دو خط oA و l صفحه P را به چهار مربع تقسیم می کنند). در مطلب بالا، این قضیه را به کار برده ایم:

در صفحه P خط l و نقطه A را در نظر می گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطه متحرک M و N به طوری که: اولاً این دو نقطه همواره نسبت به خط l قرینه باشند (یعنی خط l عمود منصف پاره خط MN باشد). ثانیاً مجموع فاصله های نقطه A از دو نقطه M و N برابر عدد معلوم P باشد.



حل: قرینه نقطه A را نسبت به خط l می سازیم و آن را A' می نامیم. داریم: $\overline{MA'} = \overline{AN}$

پس: $\overline{MA} + \overline{MA'} = \overline{AM} + \overline{AN} = P$ بنابراین، مجموع فاصله های نقطه متحرک M از دو نقطه ثابت A و A' برابر مقدار ثابت P است. پس مکان هندسی نقطه M یک بیضی است که دو نقطه A و A' دو کانون آنند و طول قطر بلندتر آن برابر P است. این بیضی را E می نامیم. مکان هندسی نقطه N، نیز همان بیضی E است. وقتی نقطه متحرک M، بیضی E را در جهتی پیماید، نقطه متحرک N بیضی E را در جهت مخالف آن می پیماید.

قضیه:

در صفحه P دو خط متقاطع l و l' را در نظر می گیریم. مکان هندسی نقاطی که حاصل ضرب فاصله های آن ها از دو خط یاد شده، برابر مقدار ثابتی باشد، یک هذلولی است که دو خط یاد شده دو مجانب آن هستند. در حالت خاصی که دو خط l و l' بر هم عمود باشند، هذلولی متساوی القطرین است.

در مسأله مورد بحث، مکان هندسی نقطه M، از دو هذلولی متساوی القطرین تشکیل شده است. مکان هندسی نقطه N نیز، همان دو هذلولی یاد شده است.

مسأله ۳:

در صفحه P دو نقطه ثابت A و B داده شده است. مطلوب است مکان هندسی دو نقطه متحرک M و N از صفحه P به طوری که:

اولاً همواره دو نقطه متحرک M و N نسبت به نقطه ثابت A قرینه باشند.

ثانیاً مجموع فاصله های دو نقطه M و N از نقطه ثابت B، برابر عدد معلوم باشد.

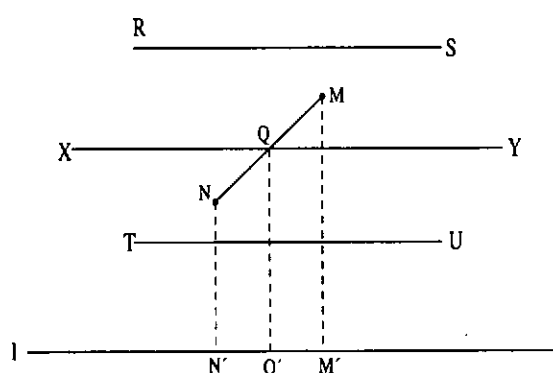
حل: نقطه B' ، قرینه نقطه B را نسبت به نقطه A تعیین می کنیم. دو مثلث AMB' و ABN مساوی اند (ض زض). پس: $\overline{MB'} = \overline{BN}$ بنابراین:

$\overline{MB} + \overline{MB'} = \overline{MB} + \overline{NB} = l$ یعنی، مجموع فاصله های نقطه متحرک M از دو نقطه ثابت B و B' برابر l است بنابراین، مکان هندسی نقطه M یک بیضی است که دو نقطه

ثابت B و B' دو کانون آند و طول قطر بلندتر آن l است. این بیضی را می نامیم. مکان هندسی نقطه متحرک N نیز، همان بیضی E است. هنگامی که نقطه متحرک M بیضی E را در جهتی می پیماید، نقطه متحرک N همان بیضی را در همان جهت می پیماید.

مسأله ۴:

خط l را در صفحه P در نظر می گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطه متحرک M و N از صفحه S، به طوری که: اولاً طول پاره خط MN برابر P باشد. ثانیاً مجموع فاصله های دو نقطه M و N از خط l برابر q باشد (با شرط $(P \geq 2q)$).



حل: نقطه وسط پاره خط MN را، Q می نامیم. تصویرهای سه نقطه M' ، Q و N را بر خط l به ترتیب M' ، Q' و N' می نامیم. در دوزنقه $MNN'M'$ داریم:

$$\overline{QQ'} = \frac{1}{2}(\overline{MM'} + \overline{NN'}) = \frac{1}{2}q$$

پس فاصله نقطه متحرک Q از خط l ، برابر مقدار ثابت $\frac{1}{2}q$ است. بنابراین، مکان هندسی نقطه متحرک Q، خط

راست xy است که موازی خط l می باشد و به فاصله $\frac{1}{2}q$ از آن قرار دارد (دو خط داریم یکی در بالای خط l و یکی در پائین آن).

دو خط RS و TV را در دو طرف خط xy، موازی با آن و به فاصله $\frac{1}{4}l$ از آن، رسم می کنیم. مکان هندسی دو نقطه متحرک M و N نواری است از صفحه S که به دو خط RS و TV محدود می شود (دو نوار داریم: یکی بالای خط l و دیگری در پائین این خط).