

منطق ریاضی

اشاره در دو قسمت قبیل با مقدمات چپ گزاره‌ها و سه ترکیب اصلی، عطفی و شرطی آشنا شدیم. در این شماره ترکیب دو شرطی گزاره‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی خواص آن می‌پردازیم. در خاتمه نیز، قوانین چپ گزاره‌ها را بیان می‌کنیم و تا حدی کاربرد آن‌ها را نشان خواهیم داد.



ممدرضا امیری

نقیض ترکیب دو شرطی

با استفاده از هم‌ارزی اخیر و نقیض گزاره‌های شرطی و عطفی، می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv [(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)] \\ \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

تذکر: در قسمت‌های بعدی و پس از بیان قوانین بین گزاره‌ها ثابت می‌کنیم:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

این هم‌ارزی نشان می‌دهد، برای نقیض کردن یک گزاره‌ی دو شرطی کافی است، یکی از دو گزاره را نقیض کنیم؛ یعنی:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

این هم‌ارزی‌ها را با استفاده از جدول نیز می‌توان ثابت کرد:

p	q	~p	~q	p ⇔ q	~(p ⇔ q)	~p ⇔ q	p ⇔ ~q
د	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	ن	ن

در ریاضیات، ترکیب‌های دو شرطی و شرطی کاربردهای فراوان دارند و در واقع، تمام قضیه‌های شرطی به نوعی ترکیب‌های شرطی، و قضیه‌های دو شرطی، ترکیب‌های

ترکیب دو شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ای مانند p، گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و همچنین، از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم، از ترکیب دو شرطی با نماد (⇔) استفاده می‌کنیم. می‌نویسیم: (p ⇔ q) و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

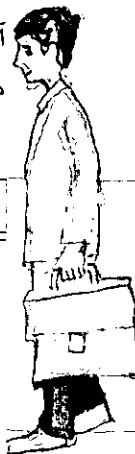
«اگر p آن‌گاه q، و اگر q آن‌گاه p»، «اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p نتیجه می‌دهد q را و برعکس»، «p اگر و فقط اگر q»، «q اگر و فقط اگر p» p شرط لازم و کافی است برای q و «q شرط لازم و کافی است برای p».

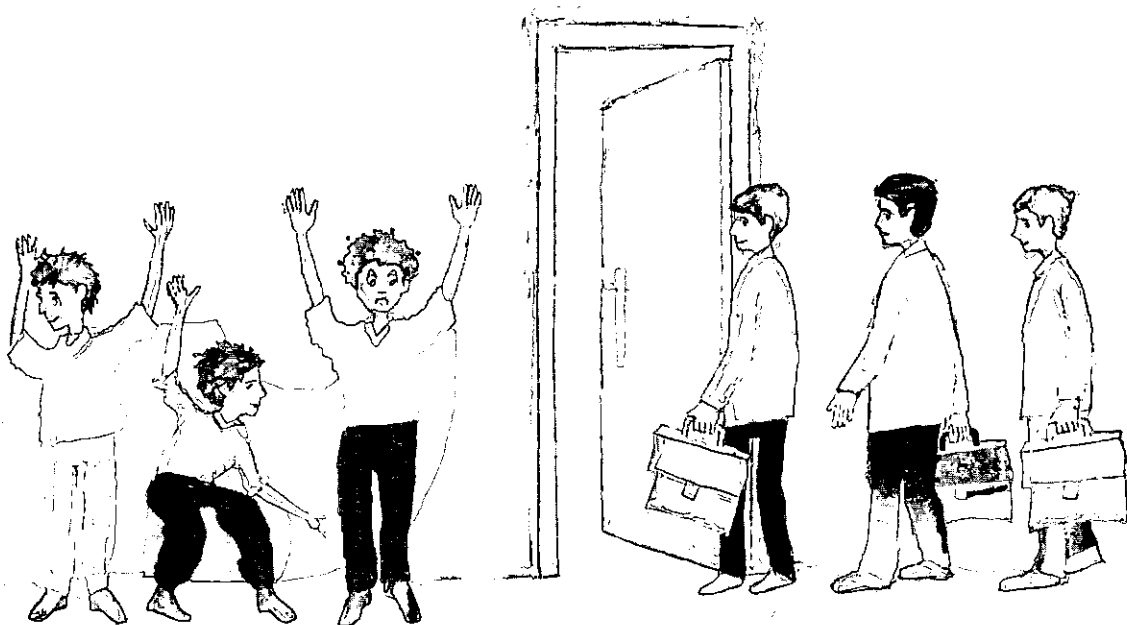
ترکیب دو شرطی بین دو گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن در صورتی درست که دو گزاره‌ی p و q مطابق جدول زیر هم‌ارز باشند (هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند):

p	q	p ⇔ q
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

تذکر: با توجه به تعریف ترکیب‌های دو شرطی، رابطه‌ی زیر به راحتی از طریق جدول قابل اثبات است:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$





مجموعه‌ی جواب مشخص شده‌اند:

(I) x عددی مثبت است:

$$D = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad M = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

(II) y عددی فرد است (صفت زوج و فرد بودن برای اعداد

صحیح تعریف می‌شود):

$$D = \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad M = 2\mathbb{Z} + 1 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 2K + 1\} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)(x + 2) = 0 \quad \text{(III)}$$

$$D = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad M = \{1, -1, -2, 2\}$$

تذکر ۱: توجه دارید که وقتی یک معادله را حل می‌کنیم (ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم)، در واقع مجموعه‌ی جواب آن معادله یا یک گزاره‌نما را محاسبه می‌کنیم. (چون معادله شامل متغیر است).

تذکر ۲: اتحادها، گزاره‌نما به حساب نمی‌آیند، زیرا همواره درست هستند و ارزش آن‌ها به متغیر یا متغیرهایشان بستگی ندارد.

$$(IV) \quad \frac{x+3}{x^2-1} \quad \text{عددی منفی است.}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{و} \quad M = (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$$

تذکر ۳: اگر گزاره‌نمایی بر حسب متغیر x بیان شده باشد، آن را با $p(x)$ نمایش می‌دهیم و اگر از دو متغیر x و y در آن استفاده شده باشد، آن را با $p(x, y)$ نشان می‌دهیم.

از مطلب مربوط به گزاره‌نماها، دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب در بخش مربوط به سورها و گزاره‌های

دو شرطی هستند، اگر با فرض درست‌ی گزاره‌ای چون p ، درست‌ی گزاره‌ای چون q را نتیجه بگیریم و این نتیجه‌گیری صحیح باشد، در واقع یک قضیه‌ی شرطی بیان کرده‌ایم که در آن، p را فرض و q را حکم می‌نامند. و اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی نیز یک قضیه‌ی شرطی باشد، یعنی با فرض درست بودن q بتوانیم درست‌ی p را نیز نتیجه بگیریم، یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده است.

قبل از آن که به بیان قوانین در جبر گزاره‌ها بپردازیم، لازم است در مورد واژه‌ی «گزاره‌نما» که در کتاب‌های درسی از آن استفاده شده و هیچ‌گونه تعریف دقیقی از آن ارائه نشده است، توضیحاتی بدهیم.

هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد و ارزش آن به متغیر یا متغیرهایش بستگی داشته باشد، گزاره‌نما نامیده می‌شود. برای هر گزاره‌نما دو مجموعه می‌توان تعریف کرد: یکی مجموعه‌ی همه‌ی مقادیری که می‌توانند به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند تا گزاره‌نما را به یک گزاره (چه درست، چه نادرست) تبدیل کنند. به این مجموعه دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با D نمایش می‌دهند. و دیگری زیر مجموعه‌ای از D (دامنه‌ی متغیر) که اگر به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرد، گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند. به آن مجموعه‌ی جواب می‌گویند و آن را با M نمایش می‌دهند. در هریک از گزاره‌نماهای زیر، دامنه‌ی متغیر و

سوری استفاده خواهیم کرد که مبحثی بسیار مهم و کاربردی است.

قوانین جبر گزاره‌ها

گزاره‌های p, q, r و ... دلخواه در نظر گرفته شده‌اند:

$$1) \begin{cases} (p \vee q) \equiv (q \vee p) \\ (p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \end{cases} \text{ قوانین جابه‌جایی}$$

$$2) \begin{cases} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \text{ قوانین شرکت‌پذیری}$$

$$3) \begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$$

قوانین توزیع‌پذیری (پخش)

تذکر: قوانین پخش را از دو طرف هم‌ارزی به خاطر بسپارید. زیرا در بسیاری موارد به جای $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ هم ارز آن یعنی $p \vee (q \wedge r)$ را به کار می‌بریم.

$$4) \begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases} \text{ قوانین جذب}$$

تذکر: قوانین جذب را می‌توان به این صورت یاد گرفت که اگر گزاره‌ای چون p دو بار ظاهر شده باشد، یک بار با « $\vee$ » و بار دیگر با « $\wedge$ »، هر گزاره‌ی دیگر غیر از آن (مانند q) جذب p شود، حاصل خود p می‌شود، به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$I) \underline{\sim r} \wedge [(q \wedge p) \vee \underline{\sim r}] \equiv \underline{\sim r}$$

$$II) \underline{(p \wedge \sim q)} \vee [(p \vee s) \wedge \underline{\sim q \wedge p}] \equiv \underline{(p \wedge \sim q)}$$

$$5) \begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \\ \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \end{cases} \text{ قوانین دمورگان}$$

$$6) \begin{cases} (p \vee T) \equiv T \\ (p \vee \sim p) \equiv T \\ F \Rightarrow p \equiv T \end{cases} \text{ گزاره‌های همیشه درست}$$

$$7) \begin{cases} (p \wedge F) \equiv F \\ (p \wedge \sim p) \equiv F \\ (p \Leftrightarrow \sim p) \equiv F \end{cases} \text{ گزاره‌های همیشه نادرست}$$

$$8) \begin{cases} p \vee F \equiv p \\ p \wedge T \equiv p \\ T \Rightarrow p \equiv p \end{cases}$$

تمرین ۱. قوانین جذب را با استفاده از قوانین ذکر شده ثابت کنید.

$$I) p \vee (p \wedge q) \\ \stackrel{(8)}{=} (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \stackrel{(2)}{=} p \wedge (T \vee q) \\ \stackrel{(6)}{=} p \wedge T \stackrel{(8)}{=} p$$

$$II) p \wedge (p \vee q) \\ \stackrel{(8)}{=} (p \vee F) \wedge (p \vee q) \stackrel{(2)}{=} p \vee (F \wedge q) \\ \stackrel{(7)}{=} (p \vee F) \stackrel{(8)}{=} p$$

تمرین ۲. هریک از عبارات‌های زیر را ساده کنید:

$$I) (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

$$II) [(\sim p \wedge r) \vee r] \vee [\sim r \vee (\sim p \wedge \sim r)]$$

حل:

$$I) (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$$

$$II) \underbrace{[(\sim p \wedge r) \vee r]}_r \vee \underbrace{[\sim r \vee (\sim p \wedge \sim r)]}_{\sim r} \equiv (r \vee \sim r) \equiv T$$

تمرین ۳. ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در عطفی توزیع‌پذیر است یعنی،

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r)$$

پخش تبدیل شرطی به فصل

$$\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$$

تبدیل فصل به شرطی

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

از این به بعد سعی می‌کنیم، هم‌ارزی‌ها را بدون استفاده از جدول و فقط با استفاده از قوانین منطق اثبات کنیم؛ یعنی از یک طرف هم‌ارزی حرکت کنیم و با استفاده از قوانین ذکر شده، به سمت دیگر هم‌ارزی برسیم که ان شاء الله در شماره‌های بعدی به تفصیل به این موضوع خواهیم پرداخت. پس تا بعد!