



اشاره: در ادامه ی بحث
منطق ریاضی
به معرفی
ترکیب شرطی
در گزاره ها
می پردازیم:

۳- ترکیبی شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره ای مانند p ، گزاره ای همچون q را نتیجه بگیریم می نویسیم $(p \Rightarrow q)$ و این گزاره ای است که به صورت های زیر خوانده می شود: (در گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ ، p را مقدم و q را تالی می نامند) « p نتیجه می دهد q را»، « q از p نتیجه می شود»، «اگر p آنگاه q »، « p شرط کافی است برای q » و « q شرط لازم است برای p ».

ترکیب شرطی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد (به عبارت دیگر اگر از یک گزاره ای درست، گزاره ای نادرست را نتیجه بگیریم ارزش آن گزاره ی شرطی نادرست است) جدول زیر گویای این مطلب است:

عکس نقیض یک ترکیب شرطی: اگر $(p \Rightarrow q)$ یک ترکیب شرطی و مفروض باشد عکس نقیض آن به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ تعریف شده و همواره هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است، به عبارت دیگر، $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ که اثبات این هم ارزی با استفاده از جدول ارزش ها بسیار ساده بوده و در جدول زیر مشاهده می کنید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که ملاحظه می کنید ارزش های مربوط به $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ در همه ی حالت های ممکن با هم یکسان بوده که هم ارزی دو عبارت را نتیجه می دهد.

تذکر مهم: همان طور که در جدول مشاهده می کنید در دو حالت آخر که مقدم یعنی p نادرست است ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست بوده و به ارزش تالی یعنی q بستگی ندارد و لذا هرگاه در یک گزاره ی شرطی به نادرست بودن مقدم پی بردیم بلافاصله نتیجه می گیریم که آن گزاره ی شرطی همواره دارای ارزش درست بوده، و این حالت را اصطلاحاً «درستی گزاره به انتفای مقدم» می گویند.

نکته: هرگاه بخواهیم درستی گزاره ای شرطی مانند $p \Rightarrow q$ را بررسی کنیم و اثبات درستی q با فرض درستی p برای ما مشکل باشد می توانیم درستی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را که هم ارز با $p \Rightarrow q$ است بررسی کنیم و در واقع با فرض نادرست بودن q به نادرست بودن p برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

تذکر مهم: هرگاه بخواهیم درستی یک گزاره ی شرطی مانند



نقیض گزاره‌های فصلی و عطفی:

گاهی اوقات نیاز داریم یک ترکیب فصلی یا عطفی را نقیض کنیم. مثلاً نقیض گزاره‌ی «a عضوی از مجموعه‌ی A یا a عضوی از مجموعه B است» چگونه باید بیان شود؟ در اینجا نیاز داریم گزاره‌هایی چون $(p \vee q)$ و $(q \wedge p)$ و $(p \Rightarrow q)$ را نقیض کنیم.

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند در این صورت داریم:

$$I) \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$II) \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

اثبات I

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

اثبات II از طریق جدول ارزش‌ها به عهده‌ی شما!

نتیجه‌ی مهم: با توجه به تبدیل ترکیب شرطی به فصلی و هم‌ارزی‌های فوق می‌توان به صورت زیر نقیض یک ترکیب شرطی را نیز به دست آورد،

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv (\sim \sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین ثابت کردیم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

به این مثال توجه کرده و با توجه به مطالب ذکر شده ابتدا

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر a^2 عددی زوج باشد آنگاه a عددی زوج است» اگر بخواهیم با فرض زوج بودن a^2 برسیم کار دشوار است. حال درستی عکس نقیض گزاره‌ی فوق را بررسی می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم «اگر a فرد باشد آنگاه a^2 نیز فرد است»

$$\text{فرد است } a \Rightarrow a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$a^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 \Rightarrow a^2 = 2k' + 1 \Rightarrow \text{فرد است } a^2$$

آیا به نظر شما برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است؟

یا برهان خلف نوعی برهان عکس نقیض است؟

شما در برهان خلف، نقیض حکم، یعنی نقیض q را فرض کرده و به یک تناقض می‌رسید و اعلام می‌کنید پس (q) نمی‌تواند درست باشد بنابراین q درست است و این تناقض که به آن می‌رسیم، هر تناقض با هر اصل یا گزاره‌ی درستی که همواره درستی آن را پذیرفته‌ایم، می‌تواند باشد ولی در برهان عکس نقیض باید از درستی (q) فقط به درستی (p) یعنی به تناقض با فرض اصلی برسیم. پس در واقع برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است.

تذکر: هر گزاره‌ی شرطی مطابق هم‌ارزی زیر با یک گزاره‌ی فصلی هم‌ارز است که اثبات هم‌ارزی نیز در جدول بررسی شده است.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نوشت:

- I) $\sim (a \in N \wedge a \notin P) \equiv (a \notin N \vee a \in P)$
 II) $\sim (\sqrt{2} \notin Q \vee \sqrt{2} \notin Z) \equiv (\sqrt{2} \in Q \wedge \sqrt{2} \in Z)$
 III) $\sim (a^2 > 0 \vee a = 0) \equiv a^2 \leq 0$ (پس باید $a < 0$ باشد)
 IV) $\sim (x \in A \vee x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$
 V) $\sim (x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$
 VI) $\sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \sim (x \notin A \vee x \notin B)$
 $\equiv (x \in A \wedge x \notin B)$

VII) $\sim [(x \in N \wedge x \in Z \Rightarrow x = 0)] \equiv$
 $(x \in N \wedge x \in Z) \wedge x \neq 0$

(توجه دارید که از رابطه ی $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$ استفاده کردیم)

VIII) $\sim (a \in P \Rightarrow (a \in N \wedge a \notin Q')) \equiv$
 $a \in P \wedge \sim (a \in N \wedge a \notin Q') \equiv a \in P \wedge (a \notin N \vee a \in Q')$

IX) $\sim (2^2 > 4^2 \vee 3^2 < 4^2) \equiv 2^2 \leq 4^2 \wedge 3^2 \geq 4^2$

X) $\sim \left[\left(\frac{1}{3} < \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^6 < \left(\frac{2}{3} \right)^6 \right] \equiv \left(\frac{1}{3} < \frac{2}{3} \right) \wedge \left(\frac{1}{3} \right)^6 \geq \left(\frac{2}{3} \right)^6$

ان شاء الله در شماری بعد به بیان ترکیب دو شرطی، نقیض آن ها و قوانین و هم ارزی های مهم دیگر خواهیم پرداخت.

سعی کنید خودتان هر گزاره را نقیض کنید.

مثال: نقیض هر یک از گزاره های مرکب زیر را به دست آورید:
 (مجموعه اعداد اول را P می نامیم)

- I) $a \in N \wedge a \notin P$
 II) $\sqrt{2} \notin Q \vee \sqrt{2} \notin Z$
 III) $a^2 > 0 \vee a^2 = 0$
 IV) $x \in A \vee x \in B$
 V) $x \in A \wedge x \in B$
 VI) $x \in A \Rightarrow x \in B$
 VII) $(x \in N \wedge x \in Z) \Rightarrow x = 0$
 VIII) $a \in P \Rightarrow a \in N \wedge a \notin Q'$
 IX) $2^2 > 4^2 \vee 3^2 < 4^2$
 X) $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^6 < \left(\frac{2}{3} \right)^6$

لازمه ی پاسخ صحیح به هر قسمت یادگیری و استفاده از فرمول ها و هم ارزی های اثبات شده ی قبل است پس می توان

مسائل مسابقه ای

۱- در مثلث ABC، $IG A = \frac{22}{\sqrt{3}}$ و ارتفاع رأس A روی ضلع BC دو پاره خط به طول های ۳ و ۱۷ واحد جدا می کند. مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۲- عدد صحیح a را طوری به دست آورید که $ax^{17} + bx^{16} + 1$ بر $x^2 - x - 1$ بخش پذیر باشد. $(b \in Z)$