

منطق جدید و ریاضیات

غلامرضا یاسی پور

به خاطر اجتناب از عدم کفایت‌های زبانی‌های طبیعی در اعداد تحلیل منطقی، لازم است که زبان طبیعی به نمادی دقیقتر ترجمه شود.

آلوتز و چرچ^۱

منطق و بنای روش آن، تنظیم این روش به عنوان مبنای روش عمومی‌ای در کاربرد اصول ریاضی احتمالات؛ و بالاخره، جمع بعضی از دلالات محتمل مربوط به طبیعت و ساخت ذهن بشری از عناصر گوناگون صدقی که طی این تحقیقات آشکار می‌شوند، است.

اما در این تحقیقات این که چه چیز اصل است و چه فرع خیلی روشن نیست و بناچار باید به قول پاتنم^۲ که:

متجسس در ریاضیات باید حقیقت ریاضیات را به عنوان فرضی قبلی یا پیشینه فرض قبول کند، نه این که دنبال توضیح آن برود.

یا به گفته فرگه که:

در حساب سروکار ما با چیزهایی نیست که... با

ارزیابی استدلال‌ات ارائه شده در زبان فارسی یا هر زبان طبیعی دیگر غالباً به علت طبیعت مبهم و دوپهلوی کلمات به کار رفته در آنها، ابهام ساختاری‌شان، اصطلاحات گمراه کننده‌ای که ممکن است دربرداشته باشند، شیوه استعاری بالقوه گیج کننده‌شان، و آشفتگی حاصل از مقصود عاطفی‌شان، مشکل است. حتی هنگامی که این مشکلات برطرف شوند، مسأله تشخیص درستی یا نادرستی استدلال همچنان باقی می‌ماند، برای اجتناب از این مشکلات برونی شایسته است که زبان علامتی مصنوعی^۳ بری از نقایص فوقی، که بتوان در آن گزاره‌ها و استدلال‌ات را علامتی کرد، طرح شود، و عهده‌دار این مهم موضوعی است که منطق علامتی^۴ یا سمبلیک نامیده می‌شود. جورج بول در آغاز فصل اول کتاب مشهورش به نام قوانین تفکر^۵ چنین تقریر می‌کند که:

مقصود از مقاله زیر تحقیق در قوانین اساسی آن دسته از اعمال ذهن که استدلال به کمک آنها انجام می‌گیرد؛ نمایش آنها در زبان علامتی يك حساب، و بر این مبناء، تأسیس علم

خارج بیگانه باشند، بلکه با چیزهایی است که مستقیماً با قوه عقلی ما ارتباط دارند و برای آن چنان روشن اند که گویی نزدیکترین بسته آن اند.

عمل کنیم و در این مراحل، چنان که غالب ریاضیدانها نمی ایستند، توقف نکنیم. در این مورد راسل به این موضوع اعتقاد داشت که ریاضیات در واقع همان منطق است. و در واقع نشان داد که ریاضیات عبارت است از منطق و نظریه مجموعه ها، یعنی می توان با صبر و حوصله کافی و تعاریفی به قدر کافی طولانی، هر یک از شاخه های ریاضیات را بر حسب منطق و نظریه مجموعه ها تعریف کرد و همه اثباتها را در چهارچوب حساب احتمالات انجام داد.

در این صورت به منطق نمادی یا علامتی که به قول اندرتون^۱ مدلی ریاضی برای تفکر قیاسی است، یا حداقل در آغاز چنین بوده، می پردازیم، و به تعریف منطق رومی آوریم، و در تعریف به صدق آن می گوئیم که: منطق دانش بررسی ساختهای نمونه صادق است، و در تعریف به استنتاج آن مطرح می کنیم که: منطق دانش بررسی ساختمانهای استنتاجی درست است.

منطق جدید، همان طور که به تفصیل ملاحظه خواهیم کرد، در رابطه با آنچه که به نام بحران در اصول ریاضیات نامیده شده، و در آغاز قرن بیستم، حضور و سرعت یافت. هرگونه کوشش در طرح سیستماتیک ریاضیات (یا هر علم دیگر) به مسأله انتخاب مفاهیم اساسی (اولیه) و اصولی که کل طرح بر آن مبتنی است، منجر می شود. مسأله انتخاب و توجیه انتخاب مفروضات اولیه مزبور قاعده در خارج علم مربوطه قرار می گیرد و به فلسفه و متدولوژی علم مربوط می شود. بسیاری از اشخاص کوشیده اند ویژگی ریاضیات را، هم از لحاظ موضوع هم از لحاظ روش تعریف کنند. موضوع ریاضیات به طور مداوم افزایش می یابد و با نظامهای جدید غنی می شود، بنابراین، به جای این که به طور ساده به شمارش این نظام پردازیم، باید طریقی در توصیف به کفایت محتویات نظریه های ریاضی بیابیم. در قرن نوزدهم، کوشش در مشخص کردن ریاضیات به عنوان علم کمیت انجام گرفت. اما امروزه باید بپذیریم که این تعریف بس محدودکننده است؛ و فی المثل، مفاهیم اساسی ریاضیات چون نظریه گروهها یا

توپولوژی را در بر نمی گیرد. این موضوعات با ساختهای اساسی ای سروکار دارند که توجه ریاضیدانها به آنها، در خالص ترین صورت شان، تنها از پایان قرن گذشته به این طرف معطوف شده است. به این ترتیب مشخص کردن ریاضیات با موضوعش مرتب در حال تغییر است و ممکن است آنچه که امروزه موضوع آن در نظر گرفته می شود فردا متغیر شود. اما مطالب مربوط به روش ریاضیات در اساس همان است که دوهزار سال پیش بوده، و از ریاضیدان این انتظار می رود که قضایای علم خود را ثابت کند، و در این مورد رابطه خوش تعریفی بین یک قضیه ریاضی و قضایایی که در اثبات این قضیه به آنها رجوع می شود موجود است، و کار منطق بررسی این رابطه می باشد.

اکنون با اشاره به این که منطق را علم بررسی استدلال خوب و بد نیز دانسته اند، به آن می پردازیم.

مورد استعمال عبارت «منطق» طی قرون متمادی به گونه وسیعی از نویسندگانی به نویسندگانی تغییر کرده است. اما چنین به نظر می رسد که موارد استعمال گوناگون مذکور دارای این قسمت مشترک باشند که: منطقی که به صورت متداول توصیف شده، به طور مبهم، علم استنتاج لازم است، و تمایل فزاینده ای موجود است که عبارت «منطق» را به این حوزه محدود کنند.

ویژگی به گونه ای کمتر مبهم این حوزه، به این ترتیب است که: عبارات اساسی شامل «اگر»، «در این صورت»، «و»، «یا»، «نه»، «جز اینکه»، «بعضی»، «همه»، «هیچ»، «هر»، «آن» و غیره، که سخن را با آنها آغاز می کنیم، را می توان منطقی^۲ نامید. عبارات فوق در گزاره های مربوط به هر موضوعی ظاهر می شوند، و نمونه ای که طبق آن سایر اجزاء خاصتر یک گزاره، طبق این عبارات اساسی به یکدیگر مربوط می شوند را می توان ساخت منطقی^۳ آن گزاره ها خواند، به عنوان مثال، گزاره های:

۱ - هر میکربی حیوان یا سبزی است،

۲ - هر ایرانی ای شیعه یا سنی است،

دارای ساخت منطقی یکسانند. در این صورت منطق حمل ساخت منطقی بر صدق و کذب را بررسی می کند.

معمولاً ظهور منطق جدید را با کارهای جورج بول^۴

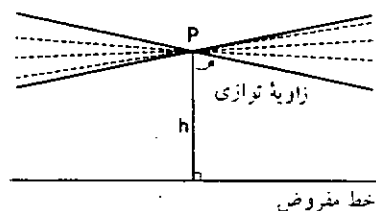
را به طریقی که امروزه آن را به کار می‌بریم به دستمان دادند، سهمی دارند.

اصل توافقی^{۱۵} اقلیدس را می‌شناسیم. طی قرون متمادی کوششهای بسیاری برای اثبات این اصل (یا اصول معادل آن) با استفاده از تعریفات، اصول موضوعه، و اصول متعارفی، گرچه بدون موفقیت، به عمل آمد. با این همه اصل مزبور همواره به عنوان حقیقتی بدیهی^{۱۶} در نظر گرفته می‌شد، تا اینکه نیکلای لباچفسکی^{۱۷} (۱۷۹۳-۱۸۵۶)، ریاضیدان روسی، با تغییر این اصل، هندسه‌ای غیراقلیدسی کشف و جزئیات آن را منتشر کرد.

در هندسه لباچفسکی به جای توافقی اقلیدسی اصل زیر قرار دارد:

از یک نقطه خارج یک خط معلوم می‌توان بی‌نهایت خط موازی با آن خط معلوم رسم کرد.

در این مورد نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:



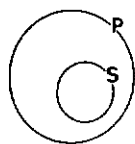
خط مفروض

(از تفسیر اقلیدسی این نمودار خودداری کنید). در این شکل خطوط گذرنده از P به دو طبقه تقسیم شده‌اند، طبقه اول آنها که خط معلوم را قطع می‌کنند، و طبقه دوم آنها که آن را قطع نمی‌کنند، و دو خطی که مرز بین طبقات را تشکیل می‌دهند، با عمود مرسوم از P به خط، زاویه‌ای حاده، که معروف به زاویه توافقی است، و مقدار واقعی آن به ارتفاع h نقطه P بالای خط معلوم بستگی دارد، می‌سازند. این زاویه هنگامی که h زیاد می‌شود به ۰، و زمانی که کم می‌شود به ۹۰ میل می‌کند.

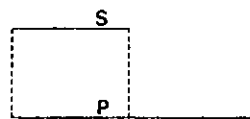
خاصیت جالب هندسه لباچفسکی در این است که این هندسه مقیاس مطلق فاصله، یعنی مقیاسی که به انتخاب واحد (مثل متر و

۱۸۱۵-۱۸۶۴) در جبر منطق^{۱۰} در نظر می‌گیرند، ولی ما تاریخ آن را یک قرن زودتر و با فیلسوف و ریاضیدان آلمانی، گوتفرد و بلهلم لایبنیتز^{۱۱} (۱۶۴۶-۱۷۱۶) آغاز می‌کنیم.

لایبنیتز احتمالاً نخستین ریاضیدانی بود که مفهوم منطق را مورد توجه قرار داد. شهرت اصلی این ریاضیدان برجسته برای کارهای خلافتش در حساب جامع و فاضل است، گرچه طراح یک زبان علامتی بین‌المللی نیز بوده است. این دانشمند در کوششهایی که برای علامتی کردن استدلالات منطقی در عبارات جبری به عمل آورد بر بول مقدم بود. اما آثارش در این مورد از آنجا که تا سال ۱۹۰۳ به چاپ نرسید، کم‌اثر یا بی‌اثر بودند. لایبنیتز به نمایش هندسی قیاسات نیز توجه داشت و اولین کسی بود که آنچه را که امروز به عنوان نمودارهای ون می‌شناسیم (۲۰۰ سال قبل از ون) به کار برد، و همراه با نمودارهای (مجموعه‌ای) دایروی از نمودارهای خطی نیز، از آنجا که آنها را برای به کار گرفتن آسانتر می‌پنداشت، استفاده کرد. دو مثال زیر مفهوم کلی این موضوع را به دست می‌دهند.

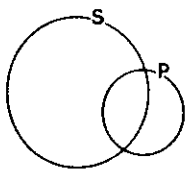


صورت دایروی

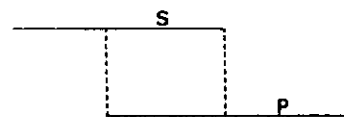


صورت خطی

تمام S ها P اند



بعضی S ها P اند



در این مورد لئونارد اولر^{۱۲} (۱۷۰۷-۱۷۸۳) سوئیسی و جان ون^{۱۳} (۱۸۳۴-۱۹۲۳) و بالاخره چارلز داج سون^{۱۴} (۱۸۳۲-۱۸۹۸) که دایرو ون را در مستطیل (یا مربع) نمایش دهنده عالم مقال* (مجموعه جهانی) قرار، و به این ترتیب نمودار ون

* اصطلاح را از این بیت حافظ گرفته‌ایم:

من که ملول گشتمی از نفس فرشتگان قال و مقال عالمی می‌کشم از برای تو

خطاهای نظریه ارسطو را، که به مدت ۲۰۰۰ سال کشف نشده باقی مانده بود، مورد بحث قرار دهد. اما آنچه که امروزه به نام جبر بول^{۲۲} معروف است، در واقع، توسعه بعدی جبری است که توسط بول مطرح شده است. توسعه مذکور کار ارزشمند^{۲۳} (۱۸۴۱ - ۱۹۰۲)، منطقی بود، که کارش را با دستگاه بول آغاز کرد، اما بعد آن را برای مقابله با مشکلات خاصی که در تعبیر، به خصوص تعبیر جمع منطقی^{۲۴} رخ می داد، تعدیل کرد.

بول به این مطلب توجه کرد که ارسطو در کار خود به طبقات^{۲۵} اشیاء نظر داشته است، زیرا گزاره

تمام انسانها میرا هستند.

بدین معنی است که طبقه تمام انسانها زیر طبقه^{۲۶} تمام موجودات میراست. به این ترتیب، زیر طبقه اعضای طبقه^{۲۷} X، که اعضای طبقه^{۲۸} Y نیز هستند، را با XY، ضرب منطقی^{۲۹}، نمایش داد، و طبقه تمام اشیایی که به طبقه X تعلق نداشتند را با $X - 1$ نشان داد. و طبقه تمام اشیایی متعلق به طبقه X یا طبقه^{۳۰} Y با فرض اینکه X و Y عضو مشترک ندارند، را با $X + Y$ ، جمع منطقی، نمایش داد. برای نمایش دادن اینکه طبقه^{۳۱} X تهی است (یعنی، عضو ندارد)، $X = 0$ ، و برای نمایش دادن اینکه طبقات X و Y یکسان اند، $X = Y$ نوشت. به این ترتیب اثبات روابط زیرکاری نسبتاً آسان است:

$$xy = yx$$

$$x + y = y + x$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

تمام این روابط با روابط آشنا در جبر معمولی ستاظرند، اما برخلاف جبر معمولی، این رابطه نیز نتیجه می شود که

$$xx = x$$

$$(x + y)(x + z) = x + yz$$

یارد) بستگی ندارد، را به دست می دهد. و این بدین علت است که فاصله (ارتفاع) h به تمامی برحسب زاویه، یک کمیت بدون بعد، اندازه گیری می شود. نتیجه دیگر اصل لباچفسکی این است که مجموع زوایای داخلی هر مثلث از دو قائمه کمتر است، اما همچنان که سطح مثلث به صفر میل می کند به مقدار اقلیدسی مایل می شود. از آنجا که در این هندسه، فاصله تنها به زوایا بستگی دارد، مثلثهای متساوی الزوایا لزوماً دارای یک سطح اند و قضایای تشابه اقلیدسی بی معنی می شوند.

مثال دیگری از هندسه نا اقلیدسی دیگر، توسط برنهارد - ریمان^{۳۲} (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶) داده شد. این ریاضیدان طی یک دوره سخنرانی معروف در دانشگاه گوتینگن^{۳۳} در سال ۱۸۴۵ هندسه ای را مطرح کرد که در آن از یک نقطه خارج یک خط معلوم هیچ خطی را نمی توان موازی آن خط رسم کرد. در هندسه ریمان مجموع زوایای داخلی هر مثلث بیش از دو قائمه است، اما همچنان که ساحت مثلث به صفر میل می کند، به مقدار اقلیدسی مایل می شود.

هر دو هندسه غیر اقلیدسی فوق، دستگاههایی کاملاً سازگارند، گرچه شهردمان بر این است که، به این مفهوم، که چنین به نظر می رسد که دنیای فیزیکی اطرافمان بر مقیاس کوچکی که می توانیم آن را اندازه بگیریم اقلیدسی است، راست نیستند. اما شهودها به هیچ وجه همیشه راهنمایی قابل اعتماد نیستند. و در این مورد باید قبل از اینکه هندسه های دیگر را کنار بگذاریم احتیاط کرده به خاطر بیاوریم که هندسه اقلیدسی نیز بر تعاریف اشیایی بنا شده که در دنیای فیزیکی ماندی ندارند، و به عنوان نمونه، نقطه به صورت «چیزی که جزء نداشته تعریف شده است. نیز باید این را به خاطر داشته باشیم که تئوری نسبیت^{۳۴} اینشتین که یکی از صورتهای تعمیم یافته هندسه ریمانی است در فضای فیزیکی راست است.

اکنون به جورج بول، که پیش از این نامش را ذکر کردیم، و کارش، راجع به جبر منطق، که با آن نام آگوستوس دومورگان^{۳۵} (۱۸۰۶ - ۱۸۷۱)، نیز مربوط است و هر دو آنها کارشان را در سال ۱۸۴۷ انتشار دادند، بازمی گردیم.

بول در ابتدا با توسعه جبر منطق سروکار داشت، و با به کار بردن صورتی از جبر، که با جبر معمولی تفاوت داشت، دریافت که امکان دارد که نظریه کامل قیاس را استنتاج کند و در حقیقت توانست

(حروف کوچک S و P به عنوان علائم متناظر با طبقات S، P در منطق ارسطو به کار رفته‌اند).
در منطق ارسطو، قیاس:

اگر هر M ی P باشد
و هر M ی S باشد
در این صورت بعضی S ها P اند.

درست در نظر گرفته می‌شود، اما، چون دو مقدمه آن را در دستگاه علامتی بول به ترتیب به صورت

$$m(1-p)=0$$

و

$$m(1-s)=0$$

قرار دهیم، آشکار می‌شود که لزوماً چیزی در مورد S و P نتیجه نمی‌شود، زیرا معادلات مزبور به ازای $m=0$ ، و به عبارت دیگر چون M طبقه‌ای تهی باشد، برقرارند. به همین ترتیب، قیاس ارسطویی:

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام M ها S باشند،
در این صورت، بعضی S ها P نیستند.

که آن نیز به صورت درست در نظر گرفته می‌شود، به طور مساوی با تهی بودن M برقرار می‌شود. اما، درستی صورت ضعیف‌تر اولین این دو قیاس، یعنی

اگر بعضی M ها P باشند،
و تمام M ها S باشند،
در این صورت، بعضی S ها P اند.

توسط بول نشان داده شده، زیرا از

اما در مورد جمع منطقی مزبور، زمانی که X و Y اعضای مشترکی داشتند، مشکلی بروز کرد. در این مورد بول طی سأل‌های استفاده از

$$x+y$$

را مجاز ساخت، اما، از آنجا که این موضوع، در چنین حالاتی، صورت نامعبری^{۲۸} بود، لازم دانست که مطلب مزبور در پاسخ نهایی خود به طور مناسبی باز-حل شود. بنابراین، در دستگاه بول، عبارت

$$x+x=x$$

از آنجا که سمت راست آن از لحاظ او نامعبر است، یافت نمی‌شود.

اکنون می‌توانیم مثالی چند از موارد استعمال دستگاه علامتی بول به دست دهیم. به عنوان نمونه، اگر

X طبقه اشیاى سخت باشد،

Y طبقه اشیاى کش‌دار باشد،

و

Z طبقه اشیاى فلزی باشد،

در این صورت

XZ طبقه اشیاى سخت فلزی را نشان می‌دهد،

و

$(1-y)$ طبقه اشیاى ناکش‌دار فلزی را نمایش می‌دهد.

باز به عنوان مثال، چهار قضیه اساسی ارسطو را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

تمام S ها P است با $s(1-p)=0$

هیچ S ی P نیست با $sp=0$

بعضی S ها P اند با $sp \neq 0$

بعضی S ها P نیستند با $s(1-p) \neq 0$

شخص محدود به علایم مقدمات مزبور باشد نمی تواند به صورت
علامتی نوشته شوند) تأکید می کرد.

فرگه، برخلاف بول، نتوانست کار علامتی کردن خود را بر مبنای
علایم جبری بگذارد زیرا سعی در استفاده از منطق در بنانهادن
پایه های حساب داشت، و در نتیجه مجبور بود که از ظهور مقدماتی
آنچه که جهد در استخراجش داشت خودداری کند. سهم بزرگ او
در دقت استثنایی روش علمی اش در کوشش در بنانهادن پایه های
ریاضیات، قرارداد دارد.

به مفهومی بس حقیقی، بول، دومورگان و شرودر در پایان مسیر
درازی که مستقیماً به ارسطو بازمی گردد، ایستاده اند، در حالی که فرگه
در آغاز راه تازه ای در منطق که همچنان ادامه دارد، و خطوط مهیجی
در تحقیق را به دست می دهد، قرار گرفته است.

در این مرحله، لازم می نماید که به عقب برگردیم و دو بحران
ریاضیات را، که یکی از آنها هنوز هم به مقدار وسیعی لاینحل
مانده است، مورد بررسی قرار دهیم.

در قرون هفدهم و هجدهم، ریاضیدانها تحت تأثیر قدرت
حساب دیفرانسیل و انتگرال، بسیاری از مسائلی را که تا آن زمان بسیار
مشکل بودند، حل کردند. در انجام این کار، آنان هیچ گاه در مورد
صحت روشهایشان نگران نبودند، و بعضی از کارهایشان را می توان،
حداقل، به عنوان بی قید توصیف کرد. فی المثل، اولر در آثارش سری
متباعدی چون

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

که جمع آن را با بیان آن به صورت

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

و قراردادن $x=1$ به دست آورد، به کار گرفت، و با دریافتن اینکه این
سری (که تصاعدی هندسی است) دارای مجموع حدی

$$\frac{1}{1+x}$$

به ازای $x < 1$ ، است، نتیجه گرفت که مجموع سری اصلی $\frac{1}{2}$ است.
روش اولر، اما، لزوماً جوابهای سازگار به دست نمی دهد. به عنوان

$$mp \neq 0$$

$$m(1-s) = 0$$

می توان نتیجه گرفت که

$$sp \neq 0$$

بول توجه خود را به طبقات و نظریه قیاس معطوف کرد، اما
معاصر او دومورگان به طور وسیعی با طبقات و نسب^{۲۹} بین طبقات
سرکار داشت. در واقع بسیاری از نتایجی که این دو به دست آوردند
یکسان بودند. این نتایج، با ادراکاتی که امروزه از این مسأله داریم به
هیچ وجه قابل توجه نیستند، گرچه چنین به نظر می رسد که در روزگار
خودشان نیز وضع بدن منوال بوده است.
نام دومورگان امروزه با قوانین تمجیم^{۳۰}

$$\frac{x \cap y}{x \cup y} = \frac{x \cap y}{x \cup y}$$

همراه است، اما این قوانین و بسیاری از روابط دیگر بین طبقات در
دوران مدرسی^{۳۱} مشخص بوده اند و صرفاً توسط دومورگان
بر حسب جبر طبقات^{۳۲} صوری بازگویی شده اند.

همانطور که ملاحظه کردیم بول و دومورگان در اصل به بیان
قوانین قبلاً مشخص شده استدلال و طبقه بندی، بر حسب جبر علامتی
می پرداختند، و مؤسس واقعی آنچه که امروزه به منطق ریاضی
معروف است گوتلر فرگه^{۳۳} (۱۸۴۸-۱۹۲۵) است. و نه تنها در
حساب گزاره ها^{۳۴}، بلکه برای کاربرد کامل سوره های عمومی و
وجودی^{۳۵} در ریاضیات، و تحلیل منطقی روش مهم اثبات با استقرای
ریاضی^{۳۶} به او مدیونیم. مقصود اصلی فرگه بنای حساب، تنها بر منطق
بود؛ یعنی این هدف که در حساب، گزاره هایی در مورد حقایق تجربی
موجود نباشد، و در این راه در واقع از رؤیای زبان علامتی جهانی^{۳۷}
لایب نیتز پیروی می کرد. و روش برخوردش، چون روش اقلیدس،
آکسیوماتیک بود، و بر تمایز بین مقدمات^{۳۸} (که می توانند به صورت
علامتی نمایش داده شوند) و قواعد استنتاج^{۳۹} (که در صورتی که

* قرون وسطی

مثال، مورد زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1+x+x^2} &= \frac{1-x^3}{1-x^3} \\ &= (1-x^3)(1+x^3+x^6+\dots) \\ &= 1-x^3+x^3-x^6+x^6-\dots\end{aligned}$$

که چون $x=1$ را در آن قرار دهیم بار دیگر سری

$$1-1+1-1+1-\dots$$

را به دست می‌آوریم، اما این بار حیلۀ اولر

$$\frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

را به عنوان جمع حدی آن به دست می‌دهد.

بحران فوق که از کاربرد بی‌احتیاط روشهای حدی سرچشمه می‌گیرد توسط آگوستین لویی کوشی^{۴۰}، (۱۷۸۹-۱۸۵۷) که نشان داد که چگونه می‌توان کاربرد به احتیاط نظریۀ حدود را به جای روشهای بی‌قید اولر قرارداد، برطرف شد. از پس این بحران، مسأله بسیار مشکل‌تر دیگری به وجود آمد.

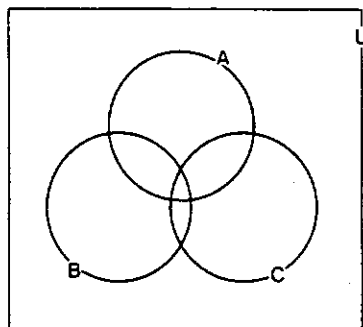
در نیمۀ دوم قرن نوزدهم نشان داده شد که بیشتر ریاضیاتی که تا آن زمان شناخته شده بود، می‌تواند به دستگاهی بنا شده از حساب اعداد صحیح مثبت تحویل شود. اما طنز در اینجا است که این موضوع نه تنها صحت و ايقان ریاضیات را بنا نکرد بلکه چاهی، که برگرد آن بسیاری از مطالب ریاضیات بنا شده بود، را نیز آشکار کرد. در گسترش دستگاههای پیچیده‌تر از حساب مقدماتی، به نظریۀ مجموعه‌هایی نیاز است، و نه صرفاً نظریۀ مجموعه‌های اعداد صحیح، بلکه نظریه‌ای که مفهوم مجموعه‌های مجموعه‌ها، مجموعه‌های مجموعه‌ها و غیره را دربرگیرد.

خالق نظریۀ مجموعه‌ها^{۴۱} جورج کانتور^{۴۲}، (۱۸۴۵-۱۹۱۸) بود. او چنین مطرح کرد که کلمۀ نامتناهی^{۴۳} در ریاضیات دارای دو معنی است. اول، می‌تواند به جای مقداری که ماورای هر حد مشخصی افزایش می‌یابد قرار گیرد، و کانتور آن را که توسط علامت اکنون آشنای ∞ نمایش داده شده نامتناهی ناتمام^{۴۴} نام نهاد. معنی دوم را می‌توان با در نظر گرفتن یک خط متناهی^{۴۵} به عنوان مجموعه نامتناهی‌ای از نقاط توضیح داد.

به علت اینکه خط مورد بحث متناهی است، دریافتی وجود دارد که در آن می‌توانیم از این مجموعه به عنوان نامتناهی تمام^{۴۶} یاد کنیم* (خط مزبور می‌تواند در تمامیت خود با وجود اینکه شامل بی‌نهایت نقطه است رسم شود، اما یک مقدار افزایش یابنده نمی‌تواند با هیچ شکل کاملی نمایش داده شود).

تعریف کانتور از مجموعه به عنوان «دسته‌ای اشیا ی معین و جدا از هم» تا وقتی که تنها به بررسی تعداد متناهی‌ای از اشیا می‌پردازیم به اشکالی برخورد نمی‌کند. اما مشکل در ارتباط با مجموعه‌های نامتناهی، و، به خصوص، با مجموعه‌های جمع مجموعه‌ها^{۴۷} پدیدار می‌شود.

کانتور دو مجموعه را معادل یا هم‌ارز^{۴۸} نامید در صورتی که بتوانند در تناظری یک به یک^{۴۹} قرار گیرند؛ به این ترتیب مجموعه‌های $\{a, b, c, d, e\}$ و $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ معادل‌اند، زیرا



* این بحث یادآور این مطلب از گلشن راز شیخ محمود شبستری است که در پاسخ شخصی که از او سؤال می‌کند که:

مسافر چون بود رهرو کدام است که را گویم که او مرد تمام است، می‌گوید:

بود مرد تمام آن کز تمامی کند با خواجگی کار غلامی

a ↔ ۱

b ↔ ۲

c ↔ ۳

d ↔ ۴

e ↔ ۵

را داریم. واضح است که مجموعه‌های معادل باید تعداد عضوهای یکسان^{۵۰} داشته باشند، و تا وقتی که کار خود را محدود به مجموعه‌های متناهی کرده‌ایم پارادوکسی حاصل نمی‌شود. اکنون مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ جمع اعداد صحیح مثبت، را در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان در تناظر يك به يك با مجموعهٔ جمع اعداد صحیح مثبت، فی‌المثل:

۲ ↔ ۱

۴ ↔ ۲

۶ ↔ ۳

۸ ↔ ۴

و در حالت کلی،

 $2n \leftrightarrow n$

قرارداد. به این ترتیب درست به اندازهٔ اعداد صحیح زوج مثبت عدد صحیح مثبت موجود است. مثالهای بسیاری از چنین مجموعه‌هایی که تعداد اعضایی برابر تعداد اعضای زیرمجموعهٔ واقعی‌ای از خود دارند موجودند، اما در هر یک از چنین حالاتی تعداد اعضا نامتناهی است. در این صورت بر سر اصل متعارف اقلیدس:

«کل چیزی بزرگتر از جزء آن چیز است»

چه می‌آید؟ این اصل به‌طور واضح در مورد مجموعه‌های نامتناهی برقرار نیست. در واقع، می‌توانیم، مجموعهٔ متناهی^{۵۱} را به عنوان مجموعه‌ای که نمی‌تواند با زیرمجموعهٔ واقعی خود معادل باشد، و مجموعهٔ نامتناهی^{۵۲} را به صورت مجموعه‌ای که می‌تواند، تعریف کنیم. با این همه نباید تصور کنیم که با نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، جمع مسائل و پارادوکسهای مطرح شده حل شده‌اند.

برای مشخص کردن اینکه چنین نیست، به ذکر تنها یکی از

اگر مجموعه‌هایی را که شامل خودشان نیستند نرمال^{۵۳}، و آنهایی را که شامل خودشان هستند (چون مجموعهٔ جمع مجموعه‌ها) آنرمال^{۵۴} بنامیم، در این صورت می‌توانیم این مسأله را که آیا مجموعهٔ جمع مجموعه‌های نرمال، نرمال است یا آنرمال، مطرح کنیم. فرض می‌کنیم نرمال باشد. در این صورت بنابه تعریف شامل خودش نیست. اما به عنوان مجموعهٔ جمع مجموعه‌های نرمال، شامل خودش است. اکنون فرض می‌کنیم آنرمال است. در این صورت شامل خودش هست، و بنابراین باید نرمال باشد. به این ترتیب در هر یک از دو حالت به تناقض می‌رسیم. (این پارادوکس خاص به نام برتراند راسل^{۵۵} (۱۸۷۲ - ۱۹۷۰)، فیلسوف انگلیسی، که آن را کشف کرد، معروف است.) صورتهای معروف بسیاری از این پارادوکس در دست است، و یکی از آنها صورت زیر می‌باشد:

در دهکده‌ای، آرایشگر دهکده صورت کسانی و تنها کسانی را که خودشان را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند. آیا بنابراین، آرایشگر مزبور صورت خود را اصلاح می‌کند؟

فرض می‌کنیم که آرایشگر خودش صورت خود را اصلاح کند. در این صورت نتیجه می‌شود که چنین نمی‌کند، زیرا تنها کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. اکنون فرض می‌کنیم صورت خود را اصلاح نمی‌کند. در این صورت، صورت خود را اصلاح می‌کند. زیرا او تمام کسانی را که صورت خود را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند: می‌توان به‌طور ساده از پارادوکس عامه‌پسند راسل با گرفتن این نتیجه که نتیجهٔ مزبور ثابت می‌کند که اصول موضوعه‌مان دروغ‌اند، یعنی، چنین آرایشگری نمی‌تواند وجود داشته باشد، خلاص شویم. اما، مجموعه‌های نرمال و آنرمال وجود دارند، بنابراین مسیر برخورد با پارادوکس راسل روشن نیست، گرچه باید یا اشتباهی در استدلال یا سستی‌ای در تعاریف آن موجود باشد.

کار فرگه، که آن را به اختصار مورد بحث قرار دادیم، شدیداً بر

خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی اثر انسان است*.

اما حتی تعریف فوق نیز خالی از اشکال نیست، زیرا برحسب نظریه مجموعه‌ها اداشده، اما این نظریه نمی‌تواند نظریه مجموعه‌های کانتور باشد زیرا مورد اخیر شامل همان پارادوکسی است که تعریف مورد بحث برای اجتناب از آن طرح شده‌است. وایتهد و راسل به این تشخیص رسیدند که علت اصلی مشکل مورد بحث در مجاز شمردن تعلق هر چیز به خودش قرار دارد، و لذا نظریه انواع^{۵۹} را مطرح کردند. به این ترتیب گفته می‌شود که:

افراد^{۶۰} از نوع ϕ اند،

مجموعه افراد از نوع ϕ اند،

مجموعه اشیای نوع ϕ از نوع ϕ اند، و غیره.

عباراتی چون

$$y \in X$$

تنها اگر X از نوعی دقیقاً یکی بیشتر از ϕ باشد، مجازند. این موضوع از مشکلات پارادوکس راسل جلو می‌گیرد، اما اینکه در مورد آن مشکلات دیگری ظهور می‌کنند یا خیر آشکار نیست.

با بازگشت به تعریف عدد 1 به عنوان مجموعه مجموعه‌ها، و پذیرفتن نظریه انواع، درمی‌یابیم که مسأله جدی‌ای داریم: z ، y باید از یک نوع باشند، و بنابراین X باید از نوع بالاتری باشد. به طور واضح، 1 به عنوان مجموعه X ها باز هم باید از نوع یکی بالاتری باشد. مطابق با انتخاب‌مان در مورد ϕ ها و ϕ ها می‌توانیم اعداد از نوع 2 ، 3 ، 4 ، و غیره را انتخاب کنیم، اما این به هیچ وجه آنچه که مقصودمان بود نیست. اینکه بگوئیم که 1 از نوع (مثلاً) 2 را به 1 از نوع 3 بیفزاییم چه معنی دارد؟ مقصودمان از ابتدا تعریف یک عدد 1 منحصر به فرد بود.

راسل که به اتفاق آلفرد نورث وایتهد^{۵۶} (۱۸۶۱-۱۹۴۷) کتاب سه جلدی اصول ریاضیات^{۵۷} را تهیه کرد، اثر گذاشت. راسل و وایتهد هوشیارانه از اصول کلی فرگه تبعیت کردند اما تغییراتی را در علامت‌نویسی و اصطلاحات او به وجود آوردند. در اینجا به بحث در تغییرات مزبور نمی‌پردازیم؛ و به طریقی که آنها برای اجتناب از مشکل پارادوکس راسل مطابق آن مطرح شدند، توجه می‌کنیم.

کار را با به دست دادن تعریفی از عدد 1 ، که، در واقع، تعبیری از آنچه راسل و وایتهد در نماد جدید:

$$1 = \{X: \sim(X=\phi) \text{ و } y \in X \wedge z \in X \Rightarrow y=z\}$$

بیان کرده‌اند، است، آغاز می‌کنیم. این نماد را به صورت زیر می‌خوانیم:

«عدد یک مجموعه اشیای X و چنان است که هیچ X ی تهی نیست، و چنان که اگر y و z هر دو به يك X متعلق باشند، در این صورت y و z یکی باشند.»

در این مورد به خصوص توجه داشته باشید که هر X باید خود یک مجموعه باشد (زیرا چیزی در مورد اعضای X ، نیز اینکه هیچ X ی تهی نیست گفته‌ایم)، و در نتیجه 1 به صورت مجموعه مجموعه‌ها تعریف شده‌است. در واقع، 1 به طور ساده به صورت مجموعه جمیع مجموعه‌های دارای یک عضو منفرد تعریف شده‌است. ممکن است تعریف فوق در نگاه اول تعریفی به گونه‌ای پیچیده به نظر برسد، اما در واقع چنین نیست، چه باروشی که در زندگی روزمره‌مان، طبق آن، با اعداد آشنا شده‌ایم، به خوبی موافقت دارد. تهیه چنین تعریفی دستاوردی بزرگ بود، زیرا قبلاً تصور می‌رفت که اعداد صحیح و مثبت، چیزهایی که دیگر نمی‌توانند مورد تحلیل قرار گیرند، هستند. لئوپلد کرونکر^{۵۸} (۱۸۲۳-۱۸۹۱) این جمله معروف را خاطر نشان کرده بود که:

* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd.2, page 19.

بروئر تصور وجود^{۶۴} در ریاضیات را مرادف ساخت پذیری^{۶۵}، و صدق^{۶۶} را مرادف اثبات پذیری^{۶۷} در نظر می گرفت. بنابراین ادعای صدق یک گزاره ریاضی ادعای اینکه اثباتی از آن داریم می شود. به همین ترتیب، ادعای کذب^{۶۸} یک گزاره ریاضی به این معنی که اثباتی داریم که اگر گزاره مزبور را راست بینگاریم این پندار گرفتار تناقض مان می کند، می باشد. این مطلب استلزامات منطقی مهمی در بردارد.

می دانیم که به ازای هر گزاره a

$$av \sim a$$

صادق^{۶۹} (یعنی a هر چه باشد راست) است. در واقع این صادق، که از دوران گذشته به عنوان قانون طرد اوسط^{۷۰} معروف بوده، بر این است که یک گزاره معلوم باید راست^{۷۱} یا دروغ^{۷۲} باشد. برای شهودگرا این مطلب به این مفهوم است که یا اثباتی برای a داریم یا در غیر این صورت، این اثبات، که فرض a به تناقض می انجامد، در دست است، بنابراین قانون طرد اوسط نمی تواند در دستگاه شهودگرایان داخل شود، زیرا این دستگاه مستلزم این است که چیزی به عنوان مسأله حل نشده وجود ندارد. اثر مفروضات شهودگرایان این است که کل حوزه هایی از ریاضیات کلاسیک که در آنها اثباتهای سنتی نباشد بر مفروض

$$av \sim a$$

نوانند بر بنایی شهودگرا دوباره سازی شوند، باید کنار گذاشته شود. اغلب ریاضیدانها موافقت دارند که هر چیزی که در دستگاه شهودگرا ثابت شود درست است، اما عموماً چنین تصور می رود که شهودگرایان بیش از اندازه محتاطاند، و ردشان بر آن همه ریاضیات در غیر این صورت پذیرفتی، زیانی جدی است.

اکنون به سراغ مؤسس مکتب دیگری از تفکر می روییم. دیسویدهیلبرت^{۷۳} (۱۸۶۲-۱۹۴۳) عقیده داشت که کوشش در بنا کردن کل ریاضیات بر بنای منطق بسیار جاه طلبانه است. برخورد او تجزیه کردن مسائل گوناگون به اجزا و خرد خرد به آنها پرداختن است. نخست، مسأله صدق و کذب، که همواره باعث مشکلات فلسفی شده بود، باید به کناری نهاده می شد، و تمرکز بر سازگاری^{۷۴} و تمایز^{۷۵} مجموعه های آکسیومها قرار می گرفت. سازگاری در این

وایتهد و راسل تصمیم گرفتند با معرفی آنچه که آن را آکسیوم تحویل پذیری^{۷۶} نامیدند، خود را از این مخمصه خلاص کنند. این آکسیوم (به طور تقریبی) به این معنی است که اگر شیء ریاضی ای از نوع معینی را تعریف کردیم، می توانیم وجود اشیا از هر نوع دیگر متناظر با آن را بینگاریم. مقصود کلی موضوع اخیر را می توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:

انواع اگرچه گاهی اهمیت پیدا می کنند،

می توان اغلب اوقات از آنها چشم پوشید.

به طور وضوح، یک چنین فرضی امکان وقوع ناسازگاری را بار دیگر به دست می دهد. ظاهراً کوشش در بنانهادن ریاضیات بر اساس منطق غیر قابل لرزانی، بادوام نیست. لزوم آکسیومی چون آکسیوم تحویل پذیری عامل مهمی در سرخوردگی ریاضیدانها از دستگاه وایتهد - راسل شد.

شکست جهد فوق در استخراج ریاضیات از منطق یکی از معضلات مهم ریاضی قرن بیستم را آشکار می کند؛ اما در این مورد کوششهای دیگری نیز برای روشن کردن مسائل جدی رخ دهنده در اساس ریاضیات انجام گرفته بود.

برخوردی کاملاً متفاوت به این مسأله از ریاضیدان هلندی ال. ای. جی. بروئر^{۷۷} (۱۸۸۱-۱۹۶۸) بود. بروئر پیش از آنکه که به مکتب شهودگرای^{۷۸} ریاضیدانها معروف شده، بود. شاید نام مزبور اندکی بداقبال باشد، زیرا چنین به نظر می رسد که مستلزم این باشد که در جریان اثباتهای ریاضی توسلی به شهود صورت می گیرد. اما در واقع، اثباتهای شهودگرایان حداقل به اندازه اثباتهای ریاضیدانهای دیگر دقیق اند؛ و اغلب دقت منطقی بیشتری را می طلبند. نام مزبور از این حقیقت مشتق شده که شهودگرایان هرگونه کوشش در بنانهادن حساب بر دستگاه اساسی تری را مردود می شمارند، و اعداد صحیح و مثبت را به عنوان حقیقتی شهودی که به صورت بنای مطمئنی که بنا کردن بر آن انجام می گیرد، به کار می رود، در نظر می گیرند. در دفاع از این نظرگاه حرف بسیاری برای گفتن موجود است.

متساوی الساقین می باشد

مطلب فوق آشکارا یاوه است، و با این همه اثبات آن از آکسیومهای اقلیدسی در مورد هندسه به دست می آید. اشکال در این واقعیت قرار دارد که آکسیومهای اقلیدسی ناتمام^{۷۶} اند و نیاز به این دارند که با آکسیومهای برخورد^{۷۷*} که بیان کننده این مطلب اند که چون خطوطی به طریق معینی رسم شوند، در قسمت معینی از صفحه برخورد می کنند، تکمیل شوند. (طریقی که شکل را رسم کرده ایم مفروض است و در نتیجه بیان می کند که D داخل مثلث واقع می شود که فرضی ناموجه است.)

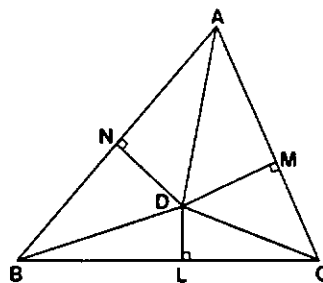
به علت این که هیلبرت و پیروانش بر ساخت دستگاههای صوری، که به کمک آن توانستند هر يك از شاخه های مشخص ریاضیات را به طور جداگانه مورد بررسی قرار دهند، متمرکز شده بودند، برخوردشان به عنوان صورت گرای^{۷۸} شناخته، و برنامه هاشان به خاطر قادر شدن به بررسی سازگاری و تمامیت این دستگاههای صوری، شامل ساخت زبان کلی تر، یا ماورای زبانی^{۷۹}، که دستگاههای صوری بتوانند در آنها مورد بحث قرار گیرند، شد. و سرانجام، نشان داده شد که سازگاری دستگاههای صوری به سازگاری حساب مقدماتی وابسته است.

متأسفانه، برنامه هیلبرت نیز مانند سایر برنامه های مقدم بر آن، سرانجام به مانعی جدی برخورد کرد. و این زمانی اتفاق افتاد که در ۱۹۳۰ کورت گودل^{۸۰} (۱۹۰۶...) نتایج خود را در مورد قضایای تردید آمیز دستگاه صوری اعلام کرد.

گودل نشان داد که در هر دستگاهی که در بیان حساب مقدماتی به قدر کافی «غنی» باشد، یا گزاره های اثبات شده ای که دروغ اند، یا گزاره های اثبات نشدنی ای که راست اند، و در آنها باید به دروغ و راست تعبیری مطابق دستگاه مورد بررسی داده شود، وجود دارند. این نتیجه احتمالاً بزرگترین نتیجه در منطق جدید است. برای آگاهی یافتن

زمینه مستلزم این است که در هیچ دستگاهی شخص نمی تواند یک مطلب و نقیض همان مطلب را اثبات کند. و تمامیت به این معنی است که آکسیومهای کافی، برای این که جمیع نتایجی که باید (به مفهومی) استنتاج پذیر باشند بتوانند استنتاج شوند، داده شده باشد. یکی از دستاوردهای اولیه هیلبرت تنظیم مجموعه کامل آکسیومهای هندسه اقلیدسی بود. اثبات اقلیدسی زیر را در نظر می گیریم:

فرض می کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد:



و فرض می کنیم نیمساز زاویه A و عمود منصف BC در D تلاقی کنند. عمودهای DN، DM را به ترتیب بر AB، AC فرود می آوریم. DB، DC را وصل می کنیم. فرض می کنیم L وسط BC باشد. اکنون از آنجا که $DL, BL=LC$ مشترک است، و $\angle BLD = \angle CLD = 90^\circ$ ، مثلثهای BLD، CLD همبسته اند، و بنابراین $BD=CD$ است. از آنجا که زوایای NAD و MAD مساوی اند، $\angle AND = \angle AMD = 90^\circ$ و AD مشترک است، مثلثهای AND، AMD همبسته اند، و بنابراین $DN=DM$ است. $AN=AM$ است.

از آنجا که $BD=DC$ ، $DN=DM$ و $\angle BND = \angle CMD = 90^\circ$ است، مثلثهای BND، CMD همبسته اند، و بنابراین $NB=MC$ است. و از آنجا که

$$AN=AM \text{ و } NB=MC$$

نتیجه می شود که

$$AB=AC$$

بنابراین مثلث دلخواهی متساوی الساقین است؛ در نتیجه هر مثلث

* وقوع، تلاقی

از اهمیت این موضوع، دستگاه صوری ساده‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که کار را با دستگاه صوری‌ای شامل (مثلاً) یک یا دو علامت منطقی، تعداد کمی علائم حسابی چون $0, 1, +, =$ و چند آکسیوم و قاعده تبدیل آغاز کنیم. می‌توان تصور کرد که جمیع گزاره‌های ممکن در چنین دستگاهی را می‌توان نوشت. اما دستگاه‌مان نباید چنان «غنی» باشد که پارادوکسهایی چون پارادوکس دروغگو*^{۸۱} را در برگیرد، یا ناسازگار باشد. اما، فرض می‌کنیم که شامل گزاره‌ای به صورت

این گزاره اثبات پذیر نیست.

باشد. گزاره مزبور را S می‌نامیم.

اگر S راست باشد، در این صورت S اثبات پذیر نیست.

اگر S راست نباشد، در این صورت S اثبات پذیر است.

اگر S اثبات پذیر باشد، در این صورت S راست نیست.

اگر S اثبات پذیر نباشد، در این صورت S راست است.

بنابراین باید نتیجه بگیریم که اگر دستگاه‌مان برای دربرداشتن S به قدر کافی «غنی» باشد، در این صورت باید حداقل شامل یک جمله که راست است اگر و تنها اگر اثبات پذیر نباشد، باشد. این مشکل در جمیع دستگاههایی که برای دربرگرفتن حساب مقدماتی به قدر کافی «غنی» اند، رخ می‌دهد، و بنابراین در پایان نشان داده می‌شود که برخورد صورت گرایی نیز، درست به اندازه برنامه استخراج کل ریاضیات از منطق، غیر قابل دفاع است و اکنون آشکار می‌شود که هیچ يك از چنین دستگاههایی نمی‌تواند هم سازگار، هم تمام باشد.

در «تاریخچه» مان سعی در نشان دادن این داشتیم که چگونه ریاضیات و منطق در سرتاسر گسترشهای مربوطه‌شان به طور مکرر بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند، و هر بار که تأثیر متقابل مستقیمی وجود داشته

هر دو دستگاه بهره‌مند شده‌اند. بسیاری از مسائل حل شده، اما حل مسائل یک قرن به طور تغییرناپذیری مسائل دیگری را، که می‌بایست توسط منطقیون و ریاضیدانهای قرن بعد به آنها پرداخته شود، مطرح کرده‌است. و اکنون می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که «در چه مرحله‌ای قرار گرفته‌ایم؟» زیرا به نظر می‌رسد که هنوز هم پارادوکسهای حل نشده‌ای در اساس ریاضیات موجود باشد. و اوضاع را می‌توان احتمالاً مطابق چیزی شبیه این توصیف کرد:

اگر طالب ایقان مطلق‌ایم، در این صورت باید به محدود کردن خود به دستگاه بسیار «مختصری» چون حساب گزاره‌ها با گزاره‌هایی به تعداد متناهی، قناعت کنیم. اما، اگر مایل به لذت بردن از غنای مخاطرات رجوع در استدلالهایی که مفاهیم نظریه مجموعه‌ها و اعداد مجازشان می‌شوند، هستیم، در این صورت باید عناصری از ناامنی، و امکان روبرو شدن با پارادوکسهایی که تنها سفری دورتر به اطراف و اکناف (امکاناً) حتی ناامن‌تر توان حل‌شان حاصل می‌شود، را به جان بپذیریم.

در پایان قولی از راسل می‌شنویم:

حاصل نخستین و بلاواسطه لحظه شهود، اعتقاد به امکان نحوه‌ای از معرفتی است که می‌توان آن را مکاشفه یا الهام یا اشراق نامید، به خلاف احساس و استدلال و تجزیه و تحلیل، که ما را در وادی جهل و وهم سرگردان می‌سازند.

و به قولی از آن جلال‌الدین محمد مولوی گوش دل فرامی‌دهیم:

درگشاد عقده‌ها گشتی تو پیر عقده‌ای چند دگر بگشاده گیر
عقده را بگشاده گیر ای منتهی عقده‌ای سخت است بر کیسه نهی
عقده‌ای کان برگلوی تست سخت اینکه دانی که خسی یانیک بخت
حل این اشکال کن گر آدمی خرج این دم کن اگر صاحب دمی

ومن الله التوفیق



* (به مقاله منطق قدیم و ریاضیات در شماره ۱ مجله برهان رجوع شود).

* این پارادوکس به صورت جدیدش چنین است: این گزاره دروغ است.

- | | | |
|---------------------------------|---|----------------------------|
| 1. Alonzo Church | 28. Uninterpreted Form | 55. Bertrand Russell |
| 2. Artificial Symbolic Language | 29. Relations | 56. Alfred North Whitehead |
| 3. Symbolic Logic | 30. Complementation Laws | 57. Principia Mathematica |
| 4. Laws of Thought | 31. Scholastic Times | 58. Leopold Kroneker |
| 5. H. Putnam | 32. Algebra of classes | 59. Theory of Types |
| 6. Herbert B. Enderton | 33. Gottlob Frege | 60. Individuals |
| 7. Logical | 34. Propositional Calculus | 61. Axiom of Reducibility |
| 8. Logical Structure | 35. Universal and Existential Quantifiers | 62. L.E.J. Brouwer |
| 9. George Boole | 36. Mathematical Induction | 63. Intuitionist School |
| 10. Algebra of Logic | 37. Universal Symbolic Language | 64. Existence |
| 11. Gottfried Wilhelm Leibniz | 38. Premisses | 65. Constructibility |
| 12. Leonhard Euler | 39. Rules of Inference | 66. Truth |
| 13. John Venn | 40. Augustin Louis Cauchy | 67. Provability |
| 14. Charles Dodgson | 41. Theory of Sets | 68. Falsehood |
| 15. Parallel Postulate | 42. Georg Cantor | 69. Tautology |
| 16. Self – evident Truth | 43. Infinite | 70. Law of Excluded Middle |
| 17. Nikolai Lobachevski | 44. Improper Infinite | 71. True |
| 18. Bernhard Riemman | 45. Finite | 72. False |
| 19. Göttingen | 46. Completed Infinite | 73. David Hilbert |
| 20. Theory of Relativity | 47. Set of all Sets | 74. Consistency |
| 21. Augustus De Morgan | 48. Equivalent | 75. Completeness |
| 22. Boolean Algebra | 49. One-one Correspondence | 76. Incomplete |
| 23. Ernst Schröder | 50. Same number of Elements | 77. Axioms of Incidence |
| 24. Logical Sum | 51. Finite Set | 78. Formalism |
| 25. Classes | 52. Infinite Set | 79. Metalanguage |
| 26. Sub-class | 53. Normal | 80. Kurt Gödel |
| 27. Logical Product | 54. Abnormal | 81. Liar Paradox |