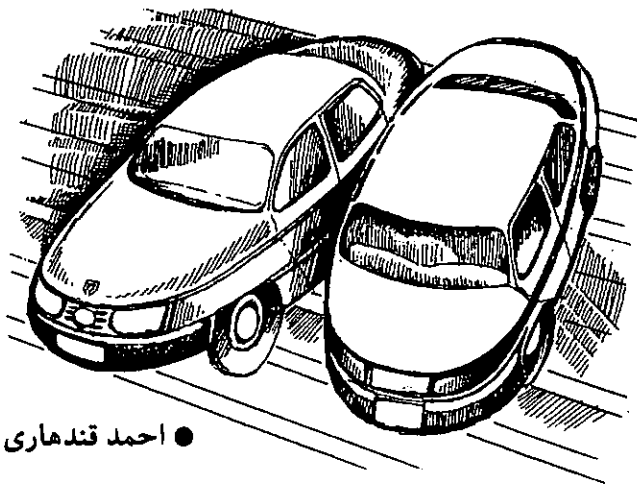




● احمد قندهاری



مماس و

قائم بر ملحق

حالت دوم: می‌خواهیم از نقطه $P(a, b)$ واقع در خارج منحنی دو مماس بر منحنی رسم کنیم.

روش اول (راه α)

فرض می‌کنیم نقطه متحرک A به طول α نقطه تماس باشد؛ بنا به حالت اول، معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه A می‌نویسیم. سپس مختصات نقطه P را در معادله خط مماس نقطه A قرار می‌دهیم. از حل معادله حاصل α ها (طول‌های نقاط تماس) به دست می‌آید.

α های به دست آمده را در معادله مماس نقطه A قرار می‌دهیم، معادله‌های مماس‌ها حاصل می‌شود.

مثال (۱۷): از نقطه $P(0, 1)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادله $y = x^2 - 7x$ رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله‌های مماس‌ها.

حل: فرض می‌کنیم نقطه A به طول α نقطه تماس باشد.

$$\begin{aligned} y_A &= \alpha^2 - 7\alpha \\ y'_x &= 2x - 7; \quad m = 2\alpha - 7 \\ y - y_A &= m(x - x_A) \end{aligned} \quad A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha^2 - 7\alpha \end{array} \right.$$

معادله مماس بر منحنی در نقطه A

$$\begin{aligned} y - \alpha^2 + 7\alpha &= (2\alpha - 7)(x - \alpha) \\ P(0, 1) \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} 1 - \alpha^2 + 7\alpha &= (2\alpha - 7)(0 - \alpha) \Rightarrow \\ 1 - \alpha^2 + 7\alpha &= -2\alpha^2 + 14\alpha \\ \Rightarrow \alpha^2 &= 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \end{aligned}$$

طول‌های نقاط تماس

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} y - 1 - 7 = (2 - 7)(x + 1) \\ \Rightarrow y &= -5x - 1 \end{aligned}$$

معادله یک خط مماس

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} y - 1 - 7 = (-2 - 7)(x + 1) \\ \Rightarrow y &= -9x - 1 \end{aligned}$$

معادله مماس دیگر

مثال (۱۸): از نقطه $P(1, -2)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادله $y = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها

را بیابید.

حل:

$$y'_x = \frac{18}{(x-1)^3} \quad \text{فرض می‌کنیم } A \text{ به طول } \alpha \text{ نقطه تماس باشد.}$$

$$y_A = 1 - \frac{9}{(\alpha-1)^2} \quad \text{و} \quad m = \frac{18}{(\alpha-1)^3}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 + \frac{9}{(\alpha-1)^2} =$$

$$\frac{18}{(\alpha-1)^3}(x - \alpha) \quad \text{معادله مماس بر منحنی در نقطه } A$$

$$P(1, -2) \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} -2 - 1 + \frac{9}{(\alpha-1)^2} = \frac{18}{(\alpha-1)^3}(1 - \alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{-3(\alpha-1)^2 + 9}{(\alpha-1)^2} = \frac{-18(\alpha-1)}{(\alpha-1)^3}$$

$$\Rightarrow -3(\alpha-1)^2 + 9 = -18 \Rightarrow$$

$$(\alpha-1)^2 = 9 \Rightarrow \alpha-1 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \alpha = 4, -2$$

طول‌های نقاط تماس

$$\alpha = 4 \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} y - 1 + \frac{9}{9} = \frac{18}{27}(x - 4) \Rightarrow$$

$$y = \frac{2}{3}(x - 4) \quad \text{معادله یکی از مماس‌ها}$$

$$\alpha = -2 \xrightarrow{\text{در معادله مماس نقطه A}} y - 1 + \frac{9}{9} =$$

$$-\frac{18}{27}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x + 2) \quad \text{معادله مماس دیگر}$$

روش دوم (راه m)

اگر بخواهیم از نقطه $P(a, b)$ واقع در خارج یک منحنی، دو مماس بر منحنی رسم کنیم، شیب‌های مماس‌ها را m فرض می‌کنیم. با در دست داشتن نقطه P و شیب m معادله فرضی مماس را می‌نویسیم، این خط را با معادله تقاطع می‌دهیم (ها حذف). سپس شرط ریشه مضاعف را برای

$$\begin{cases} y = mx - mx_1 + y_1 \\ y = \frac{x^2 + 1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{mx - mx_1 + y_1}{1} \Rightarrow$$

$$mx^2 - mx_1x + y_1x = x^2 + 1$$

$$(m-1)x^2 + (y_1 - mx_1)x - 1 = 0 \quad \text{معادله تقاطع خط و منحنی}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{شرط ریشه مضاعف}$$

$$(y_1 - mx_1)^2 + 4(m-1) = 0$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2x_1y_1m + 4m - 4 = 0$$

$$x_1^2m^2 + 2(2 - x_1y_1)m + (y_1^2 - 4) = 0$$

ریشه‌های این معادله m' و m'' شیب‌های مماسند. چون دو مماس بر هم عمودند؛ پس:

$$m' \cdot m'' = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{y_1^2 - 4}{x_1^2} = -1 \Rightarrow$$

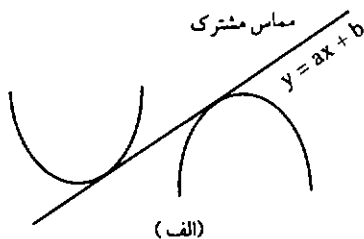
$$y_1^2 - 4 = -x_1^2 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \text{معادله مکان}$$

یعنی از هر نقطه واقع بر دایره به معادله $x^2 + y^2 = 4$ ، که دو مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ رسم کنیم، دو مماس بر هم عمودند.

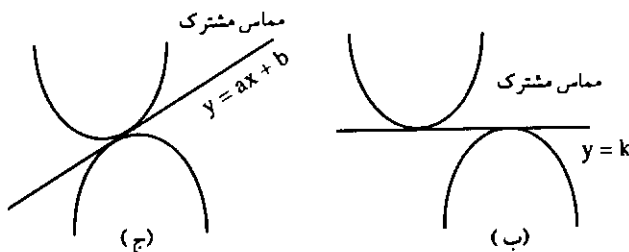
تمرین: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که اگر از آن نقاط دو مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 = 8$ واقع در همان صفحه رسم کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند.

$$x_1^2 + y_1^2 = 16 \quad \text{جواب}$$

مماس مشترک: به شکل‌های زیر توجه کنید:



(الف)



(ج)

(الف) اگر خط $y = ax + b$ مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 باشد، برای یافتن معادله مماس مشترک خط $y = ax + b$ را با هر یک از منحنی‌های y_1 و y_2 تقاطع می‌دهیم؛ سپس $\Delta = 0$ مثال (۲۱): معادله مماس مشترک دو منحنی به

معادله تقاطع می‌نویسیم و از آن جا m به دست می‌آید. اما در معادله فرضی مماس قرار می‌دهیم.

توجه: (معادله تقاطع) $-\frac{b}{2a}$ = طول نقطه تماس

مثال (۱۹): از نقطه $P(0, 4)$ دو مماس بر منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 4$ رسم می‌کنیم، مطلوب است معادله‌های مماس‌ها و مختصات نقاط تماس.

حل: شیب مماس‌ها را m فرض می‌کنیم.

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

معادله فرضی مماس $y - 4 = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + 4$ این خط را با معادله منحنی تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = mx + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx + 4)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$(m^2 + 1)x^2 + 8mx + 12 = 0 \quad \text{معادله تقاطع}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow \text{شرط ریشه مضاعف}$$

$$16m^2 - 12(m^2 + 1) = 0$$

شیب‌های مماس‌ها $4m^2 = 12 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{معادله یک خط مماس} & y = mx + 4 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 4 \\ \text{طول نقطه تماس} & x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8m}{2(m^2 + 1)} = -\frac{8\sqrt{3}}{2(4)} = -\sqrt{3} \\ \text{عرض نقطه تماس} & y = \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 4 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معادله مماس دیگر} & y = mx + 4 \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 4 \\ \text{طول نقطه تماس} & x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8m}{2(m^2 + 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{2(4)} = \sqrt{3} \\ \text{عرض نقطه تماس} & y = -\sqrt{3}(\sqrt{3}) + 4 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

مثال (۲۰): معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید

که بتوان از آن نقاط، دو مماس عمود بر هم بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ واقع در همان صفحه رسم کرد.

حل: فرض می‌کنیم $P(x_1, y_1)$ یک نقطه از مکان باشد؛

یعنی وقتی از نقطه P دو مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ رسم می‌کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند، مانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

شیب مماس به فرض $m =$

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = mx - mx_1 + y_1$$

این خط را با معادله منحنی تقاطع می‌دهیم:

به شرطی که دو منحنی بر هم مماس باشند.

حل: بدون بیان شرط در مسأله هم می توان مانند قسمت الف مسأله را حل کرد؛ ولی با وجود شرط، مسأله ساده تر حل خواهد شد.

دو منحنی را با هم تقاطع می دهیم:

$$\begin{cases} y_1 = 2x^2 - 4x + 1 \\ y_2 = x^2 + 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x - 8$$

ریشه مضاعف $x = 3 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$
 ریشه مضاعف معادله تقاطع دو منحنی y_1 و y_2 است،
 از این جا نتیجه می گیریم دو منحنی y_1 و y_2 در $x = 3$ بر هم
 مماسند؛ پس یک خط مماس مشترک دارند.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{در معادله یکی از منحنی ها}} y = 7$$

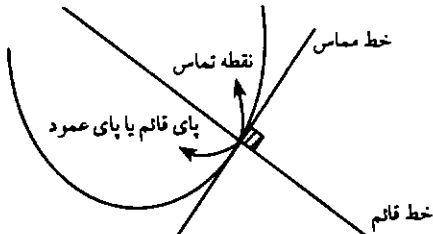
$$y_1' = 4x - 4 \xrightarrow{x=3} m = 12 - 4 = 8$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = 8(x - 3) \Rightarrow$$

$$y = 8x - 17 \quad \text{معادله مماس مشترک دو منحنی}$$

قائم یا عمود بر منحنی

خط قائم، خطی است که در نقطه تماس بر خط مماس بر منحنی عمود باشد.



حالت اول: طرز نوشتن معادله قائم بر منحنی، در نقطه ای واقع بر منحنی، عیناً مانند حالت اول مماس بر منحنی عمل می کنیم؛ با توجه به تغییر ضریب زاویه (شیب).

مثال (۱): در نقطه A به طول صفر واقع بر منحنی به معادله $y = \frac{x-1}{x+1}$ قائمی بر این منحنی رسم می کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

حل:

$$y'_x = \frac{2}{(x+1)^2}$$

A|

$$y_A = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \text{و} \quad m = \frac{2}{(0+1)^2} = 2 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

معادله خط قائم

معادله های $y_1 = -x^2 + 2x + 1$ و $y_2 = x^2 - 8x + 14$ را بیابید.

حل: فرض می کنیم $y = ax + b$ معادله مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 باشد، این خط را با هر یک از معادله های منحنی ها تقاطع می دهیم؛ سپس $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow ax + b = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + (a-2)x + (b-1) = 0$$

$$\Delta = (a-2)^2 - 4(b-1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 4b = -8 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 14 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 14 = ax + b \Rightarrow$$

$$x^2 - (a+8)x + (14-b) = 0$$

$$\Delta = (a+8)^2 - 4(14-b) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 16a + 4b = -8$$

(۲)

$$(1); \begin{cases} a^2 - 4a - 4b = -8 \\ a^2 + 16a + 4b = -8 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(2); \begin{cases} a^2 + 16a + 4b = -8 \\ a^2 - 4a - 4b = -8 \end{cases}$$

$$a^2 + 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a+2)(a+4) = 0 \Rightarrow a = -2, a = -4$$

$$a = -2; a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$4 + 8 + 8 = 4b \Rightarrow b = 5$$

$$a = -4; a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$16 + 16 + 8 = 4b \Rightarrow b = 10$$

ب) ممکن است معادله مماس مشترک به صورت $y = k$ باشد، که معمولاً در تست ها مطرح می شود.

مثال (۲۲): معادله مماس مشترک دو منحنی به

معادله های $y_1 = x^2 - 2x - 5$ و $y_2 = -x^2 + 4x - 5$ را بیابید.

حل: اگر چه این مسأله را می توان مانند قسمت الف حل کرد؛ ولی راه ساده تر آن چنین است:

$$y_1' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} y = -1$$

$$y_2' = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} y = -1$$

پس $y = -1$ عرض های اکسترم هر دو منحنی است؛ بنابراین بر هر منحنی دو مماس است. به شکل (ب) توجه کنید.

ج) ممکن است دو منحنی بر هم مماس باشند که در این صورت، باز هم یک مماس مشترک دارند.

مثال (۲۳): معادله مماس مشترک دو منحنی به

معادله های $y_1 = 2x^2 - 4x + 1$ و $y_2 = x^2 + 2x - 8$ را بیابید؛

در این معادله، مجموع ضرایب صفر است، پس یک جواب $k=1$ ، برای ادامه حل معادله را بر $(k-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$k^2 + k - 2 \Big| \begin{array}{r} k-1 \\ \hline k^2 + k + 2 \end{array}$$

$$k^2 + k - 2 = (k-1)(\underbrace{k+2}_{\text{معاودة ثبت است}}) = 0 \Rightarrow \underbrace{k+2}_{\text{ثبت است}} \begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$k-1=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow (\alpha-1)^2=1 \Rightarrow \alpha-1=\pm 1 \Rightarrow \alpha=0, 2$$

طول‌های پای قائم: آنها را در معادله قائم نقطه N قرار می‌دهیم:

$$\alpha=0; y-1+1=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\alpha=2; y-1+1=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

خط قائم، یک خط است و در دو نقطه بر منحنی عمود است.

تمرین

۱. به ازای چه مقادیر، m معادله $x^4 - 10x + m - 4 = 0$

ریشه مضاعف دارد؟

۲. به ازای چه مقادیر، m منحنی به معادله

$$y=(x^2-4)(x^2+mx-5)$$

بر محور x مماس است؟

۳. اگر $x^4 + 7y + 7x - 4 = 0$ و نقطه A به طول ۱ روی

منحنی باشد، شیب خط مماس را بیابید.

۴. نقاطی از منحنی به معادله $y=\frac{2x}{4x-1}$ را بیابید که شیب

خط مماس در آن نقاط برابر $-\frac{2}{49}$ باشد.

۵. نقاطی از منحنی به معادله $x^2 + 3y^2 = 4$ را بیابید که

شیب خط مماس در آن نقاط برابر $-\frac{1}{3}$ باشد.

۶. معادله خط‌های مماس و قائم بر منحنی به معادله

$$y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ بیابید.

۷. از نقطه $P(0, -1)$ دو مماس بر منحنی به معادله

$$y=x^2-x$$

رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

۸. از نقطه $P(0, 6)$ دو مماس بر منحنی به معادله

$$x^2 + y^2 = 4$$

رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها و مختصات

نقاط تماس را بیابید.

۹. از مبدأ مختصات، قائمی بر منحنی به معادله $y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}$

رسم کرده‌ایم، مطلوب است محاسبه طول‌های پای قائم و

معادله خط قائم؟

مثال (۲): در نقطه A به طول $\frac{\pi}{3}$ واقع بر منحنی به معادله $y = \frac{\sin x + \sqrt{3}}{\sin x}$ قائمی بر این منحنی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

$$y_A = \frac{\sin \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$$

$$y'_x = \frac{\cos x \sin x - \cos x (\sin x + \sqrt{3})}{\sin^2 x} = \frac{-\sqrt{3} \cos x}{\sin^2 x}$$

$$m_{\text{قائم}} = \frac{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$m_{\text{قائم}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + 3 \quad \text{معادله خط قائم}$$

حالت دوم: طرز نوشتن معادله خط قائم بر منحنی از

نقطه $P(a, b)$ واقع در خارج منحنی مانند راه α مسأله مماس

حل می‌کنیم، با توجه به تغییر شیب خط.

مسأله: از نقطه $P(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ قائمی بر منحنی تابع به معادله

$$y = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله قائم؟

$$y_N = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

$$y'_x = \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{2}{(\alpha-1)^3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-(\alpha-1)^2}{2}$$

$$y - y_N = m_{\text{قائم}}(x - x_N) \Rightarrow y - 1 + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^2}{2}(x - \alpha)$$

معادله قائم بر منحنی در نقطه N

$$P(1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \xrightarrow{\text{مسأله قائم نقطه N}} \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^2}{2}(1 - \alpha) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{-(\alpha-1)^2 + 2}{2(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{2} \quad (\alpha-1)^2 = k \text{ فرض می‌شود}$$

$$\frac{-k + 2}{k} = \frac{k^2}{1} \Rightarrow k^2 = -k + 2 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$