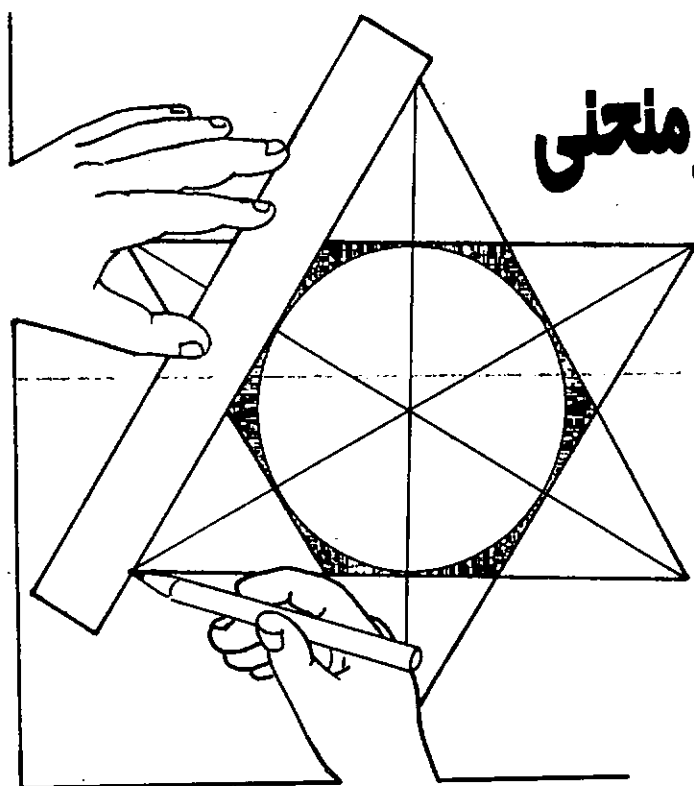


مماس و قائم بر منحنی

(قسمت اول)

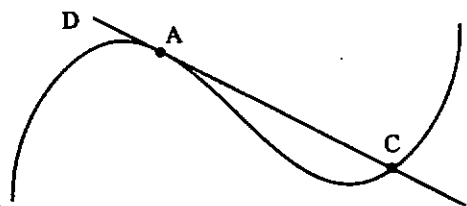


● احمد قندهاری

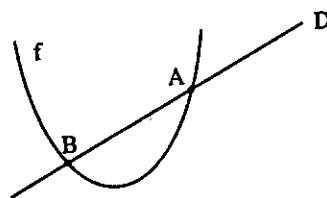
پس می توان گفت:

تعریف: خط مماس بر منحنی، یک تابع حد قاطع است؛ وقتی دو نقطه تقاطع بر هم منطبق شوند. به عبارت دیگر، خط مماس، خطی است که منحنی تابع را در دو نقطه منطبق بر هم قطع کند.

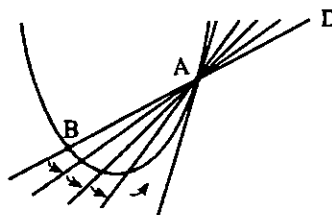
ممکن است خط مماس بر منحنی یک تابع، در نقطه ای مانند A، نمودار تابع را در نقطه دیگری مانند C قطع کند. (شکل زیر)



پیش از طرح مسائل مربوط به مماس بر منحنی، ریشه مضاعف را بیان می کنیم.



فرض می کنیم خط D نمودار تابع f را در دو نقطه متمایز A و B قطع کند، اگر نقطه A را ثابت نگه داریم و خط D را حول نقطه A در جهت بیرون منحنی، آهسته آهسته به حرکت درآوریم، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیکتر می شود. هرگاه نقطه B بر نقطه A منطبق شود، خط D یک وضعیت حدی پیدا می کند که آن را خط مماس بر منحنی در نقطه A گوئیم.



توجه: از این قضیه، در مسائل پارامتری درجه دوم به بالا استفاده می‌کنیم.

مثال (۳): به ازای چه مقادیر m معادله $x^2 - 3x + m = 0$ ریشه مضاعف دارد؟

حل: ریشه‌های ساده معادله ($= 0$ مشتق) را پیدا می‌کنیم.

$$P(x) = x^2 - 3x + m$$

$$P'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{یا}$$

ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ عدد 1 یا عدد -1 می‌باشد.

اگر ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ عدد 1 باشد، داریم:

$$x = 1; \quad P(1) = 1 - 3 + m = 0 \Rightarrow m = 2$$

اگر ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ عدد -1 باشد، داریم:

$$x = -1; \quad P(-1) = -1 + 3 + m = 0 \Rightarrow m = -2$$

پس اگر $m = 2$ ، آن‌گاه ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ عدد

(۱) است. چنانچه $m = -2$ ، آن‌گاه ریشه مضاعف معادله

$$P(x) = 0 \text{ عدد } (-1) \text{ است.}$$

مثال (۴): به ازای چه مقدار m معادله $x^6 - 192x + 80m = 0$

ریشه مضاعف دارد؟

حل: ریشه ساده معادله ($= 0$ مشتق) ریشه مضاعف معادله

اصلی است.

$$P(x) = x^6 - 192x + 80m = 0$$

$$P'(x) = 6x^5 - 192 = 0 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

$x = 2$ ریشه ساده معادله $P'(x) = 0$ است، که ریشه

مضاعف معادله $P(x) = 0$ خواهد شد:

$$x = 2; \quad P(2) = 2^6 - 192(2) + 80m = 0$$

$$64 - 384 + 80m = 0 \Rightarrow m = \frac{320}{80} = 4$$

دوباره به تعریف خط مماس بر منحنی بر می‌گردیم. گفتیم که خط مماس بر منحنی یک تابع، نمودار تابع را در دو نقطه

ریشه مضاعف

اگر $x = a$ ریشه تکراری دفعات زوج یک معادله باشد، آن‌گاه $x = a$ را ریشه مضاعف معادله گویند. سایر ریشه‌های معادله که این شرایط را ندارند، ریشه ساده معادله اند.

مثال (۱): ریشه‌های ساده و مضاعف معادله $(x^2 - 2\sqrt{3}x + 2)(x - \sqrt{3}) = 0$ را بیابید.

حل:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{ریشه ساده}$$

توجه: اگر معادله درجه دوم، دو ریشه مساوی داشته باشد، آن ریشه را ریشه مضاعف گوئیم.

مثال (۲): معادله $(x^2 - 5x + 4)^2 (x^2 - 3x + 2) = 0$ چند ریشه ساده و چند ریشه مضاعف دارد؟

حل:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$(x - 1)^2 (x - 4)^2 (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$(x - 1)^3 (x - 4)^2 (x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ریشه ساده} \\ x = 4 & \text{ریشه مضاعف} \\ x = 2 & \text{ریشه ساده} \end{cases}$$

قضیه: اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعف $x = a$ داشته باشد، آن‌گاه $x = a$ ریشه ساده معادله $P'(x) = 0$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$P(x) = (x - a)^n Q(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad Q(a) \neq 0$$

پس $x = a$ ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ است. حال:

$$P'(x) = n(x - a)^{n-1} Q(x) + (x - a)^n Q'(x)$$

$$P'(x) = (x - a)^{n-1} [nQ(x) + (x - a)Q'(x)]$$

اگر $P'(x) = 0$ ، آن‌گاه $x = a$ ریشه ساده آن خواهد بود. اگر برانز دوم را برابر صفر قرار دهیم، ریشه $x = a$ نخواهد داشت.

حل: معادله $(x^2 - 6x + m)(x^2 - 1) = 0$ باید دو ریشه برابر داشته باشد.

$$\Delta' = 9 - m = 0 \Rightarrow m = 9 \quad ; \quad x^2 - 6x + m = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\text{ب) } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ یا}$$

حال m ها را چنان تعیین می‌کنیم که یکی از دو ریشه معادله $x^2 - 6x + m = 0$ عدد ۱ یا عدد -۱ باشد:

$$x = 1 \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 6x + m = 0 \\ 1 - 6 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

$$x = -1 \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 6x + m = 0 \\ 1 + 6 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -7$$

در نتیجه، اگر $m = 9$ یا $m = 5$ یا $m = -7$ ، آنگاه منحنی f بر محور x ها مماس است.

می‌دانیم اگر نقطه‌ای به طول a روی نمودار تابع مشتق‌پذیر f باشد (کافی است تابع f در یک همسایگی a مشتق‌پذیر باشد)، آنگاه $f'(a)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول a است و آن را با $m = f'(a)$ نشان می‌دهیم.

شیب خط مماس در نقطه $A(a, b)$ واقع بر یک منحنی، برابر است با: مشتق معادله منحنی به ازای مختصات نقطه A (نقطه A نقطه تماس است).

برای مثال، شیب خط مماس بر منحنی معادله $f(x) = x^2 - 4x + 1$ در نقطه‌ای به طول صفر، واقع بر منحنی برابر $f'(0)$ است.

$$f'(x) = 2x - 4 \quad ; \quad f'(0) = 0 - 4 = -4 = m$$

مثال (۸): شیب خط مماس بر منحنی به معادله $f(x, y) = -2x + y^2 - 3y + 8 = 0$ در نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر منحنی را بیابید.

$$\text{حل: } y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-2}{2y-3} = \frac{2}{2y-3}$$

منطبق بر هم قطع می‌کند؛ یعنی اگر معادله خط مماس را با معادله منحنی تقاطع دهیم (ها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشه برابر داشته باشد (ریشه مضاعف داشته باشد).

مثال (۵): به ازای چه مقدار m خط $y = 2x - m$ بر منحنی به معادله $y = x^2 - 2x$ مماس است.

حل: باید معادله تقاطع خط و منحنی، ریشه مضاعف (دو ریشه برابر) داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x - m \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 2x - m \Rightarrow x^2 - 4x + m = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow 4 - m = 0 \Rightarrow m = 4$$

مثال (۶): به ازای چه مقدار m ، منحنی تابع به معادله $f(x) = (x-1)(x^2 + mx - 4)$ بر محور x ها مماس است.

حل: معادله محور x ها $y = 0$ است. باید معادله تقاطع خط و منحنی، دو ریشه برابر داشته باشد:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)(x^2 + mx - 4) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x^2 + mx - 4) = 0$$

این معادله باید دو ریشه برابر داشته باشد.

معادله $x^2 + mx - 4 = 0$ ، دو ریشه متمایز دارد؛ زیرا:

$$\Delta = m^2 + 16 > 0$$

پس این معادله، نمی‌تواند دو ریشه برابر داشته باشد.

ریشه معادله $x - 1 = 0$ ، عدد (۱) است. حال m را چنان می‌یابیم که یکی از دو ریشه معادله $x^2 + mx - 4 = 0$ عدد (۱) باشد.

$$x = 1 \quad ; \quad x^2 + mx - 4 = 0 \Rightarrow 1 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = 3$$

توضیح:

$$\begin{aligned} m = 3 \quad ; \quad & (x-1)(x^2 + mx - 4) = 0 \\ & (x-1)(x^2 + 3x - 4) = 0 \\ & (x-1)(x-1)(x+4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ریشه مضاعف} \quad & (x-1)^2(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \\ \text{ریشه ساده} \quad & \end{aligned}$$

مثال (۷): مقادیر m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادله $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 6x + m)$ بر محور x ها مماس باشد.

طول‌های نقاط تماس $\Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 3, -2$

$f(3) = \frac{7}{5}, f(-2) = \frac{3}{5}$

نقاط تماس عبارتند از: نقاط $(3, \frac{7}{5})$ و $(-2, \frac{3}{5})$.

مثال (۱۱): نقطه‌ای از منحنی به معادله

$3x + y^2 - y - 2 = 0$ را بیابید که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر $-\frac{1}{5}$ باشد.

حل: شیب خط مماس $y'_x = -\frac{3}{2y-1}$

عرض نقطه تماس $-\frac{3}{2y-1} = -\frac{1}{5} \Rightarrow 2y-1 = 15 \Rightarrow y = 8$

در معادله منحنی $y = 8 \Rightarrow 3x + 64 - 8 - 2 = 0 \Rightarrow 3x = -54 \Rightarrow x = -18$

پس نقطه $(-18, 8)$ نقطه تماس یا نقطه مطلوب است.

مثال (۱۲): نقاطی از منحنی به معادله $2x^2 + y^2 = 3$ را

بیابید که خط‌های مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط $2y - x + 4 = 0$ عمود باشد.

حل:

$2y - x + 4 = 0 \Rightarrow m' = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -2$ مماس

$y'_x = -\frac{4x}{2y} = m$ مماس

$-\frac{2x}{y} = -2 \Rightarrow y = x$

$y = x$ معادله خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد (رابطه بین مختصات نقاط تماس).

اگر این خط را با معادله منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به دست می‌آید.

$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
طول‌های نقاط تماس

$x = \pm 1, y = \pm 1$

نقاط تماس یا نقاط مطلوب، عبارتند از $(1, 1)$ و $(-1, -1)$.

مماس $m = \frac{2}{2(1)-3} = \frac{2}{-1} = -2$

مثال (۹): شیب خط مماس بر منحنی به معادله $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2x - 7y = 0$ در نقطه‌ای به طول ۲ (یا عرض بزرگتر) را بیابید.

حل:

$x = 2; 4(2)^2 + y^2 - 4 - 7y = 0 \Rightarrow$

$y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=4 \end{cases}$ قابل قبول

$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{8x-2}{2y-7}$

مماس $m = -\frac{8(2)-2}{2(4)-7} = -\frac{14}{1} = -14$

بعکس، اگر مشتق معادله منحنی $f(x, y) = 0$ یا $f(x) = 0$ برابر شیب خط مماس قرار دهیم، آن‌گاه:

(الف) اگر عبارت مشتق بر حسب x باشد، طول نقطه تماس به دست می‌آید.

(ب) اگر عبارت مشتق بر حسب y باشد، عرض نقطه تماس به دست می‌آید.

(ج) اگر عبارت مشتق بر حسب x و y باشد، آن‌گاه رابطه‌ای بین مختصات نقاط تماس به دست می‌آید (اگر معادله

حاصل بر حسب x و y از درجه اول باشد، معادله خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد).

چنانچه این رابطه را با معادله منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به دست می‌آید.

مثال (۱۰): مختصات نقاطی از منحنی به معادله $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ را بیابید که شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در این نقاط، برابر $-\frac{4}{25}$ باشد.

حل: $f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}, f'(x) = m = -\frac{4}{25}$

$\frac{-4}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{25} \Rightarrow (2x-1)^2 = 25 \Rightarrow 2x-1 = \pm 5$

حالت اول: طرز نوشتن معادله خط مماس بر منحنی، وقتی نقطه روی منحنی باشد.

۱. طول یا عرض معلوم نقطه را در معادله منحنی قرار می‌دهیم، عرض یا طول مجهول آن به دست می‌آید.

۲. به کمک مشتق، شیب خط مماس را می‌نویسیم.

۳. اگر نقطه تماس را A بنامیم، از فرمول $y - y_A = m(x - x_A)$ ، معادله خط مماس را می‌نویسیم.

مثال (۱۳): معادله خط مماس بر منحنی تابع به معادله $y = \sqrt{x^2}$ در نقطه A به طول ۸ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل: $y_A = \sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 4$

$y'_x = \frac{2}{3\sqrt{x}}$; مماس $m = \frac{2}{3\sqrt{8}} = \frac{1}{3}$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{3}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه A

مثال (۱۴): معادله خط مماس بر منحنی به معادله $x + y^2 - y - 4 = 0$ در نقطه A به عرض ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$y_A = 1, x + 1 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow x_A = 4$

$y'_x = -\frac{1}{2y-1}$; مماس $m = -\frac{1}{2-1} = -1$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 4)$

$\Rightarrow y = -x + 5$

معادله خط مماس

مثال (۱۵): معادله خط مماس بر منحنی به معادله $xy + \sin(xy) - 4y + 4 = 0$ در نقطه A به طول صفر را بنویسید.

حل:

$x_A = 0, 0 + \sin 0 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y_A = 1$

$y'_x = -\frac{y + y \cos(xy)}{x + x \cos(xy) - 4}$

$A|_1 \xrightarrow{\text{در عبارت } y'_x} \text{مماس } m = -\frac{1 + \cos 0}{0 + 0 - 4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ معادله خط مماس

مثال (۱۶): معادله خط مماس بر منحنی تابع به معادله $y = x + \text{Arctan } x$ در نقطه A به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل: $x_A = 1, y_A = 1 + \text{Arctan } 1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$

$y'_x = 1 + \frac{1}{1+x^2}$; مماس $m = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{4+\pi}{4} = \frac{3}{2}(x - 1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{4+\pi}{4}$ معادله خط مماس

ادب ریاضی

«من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه گر شوم؛ اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه بیگاه، سنگریزه‌ای صافتر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر به دست می‌آورم؛ در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»
نیوتون