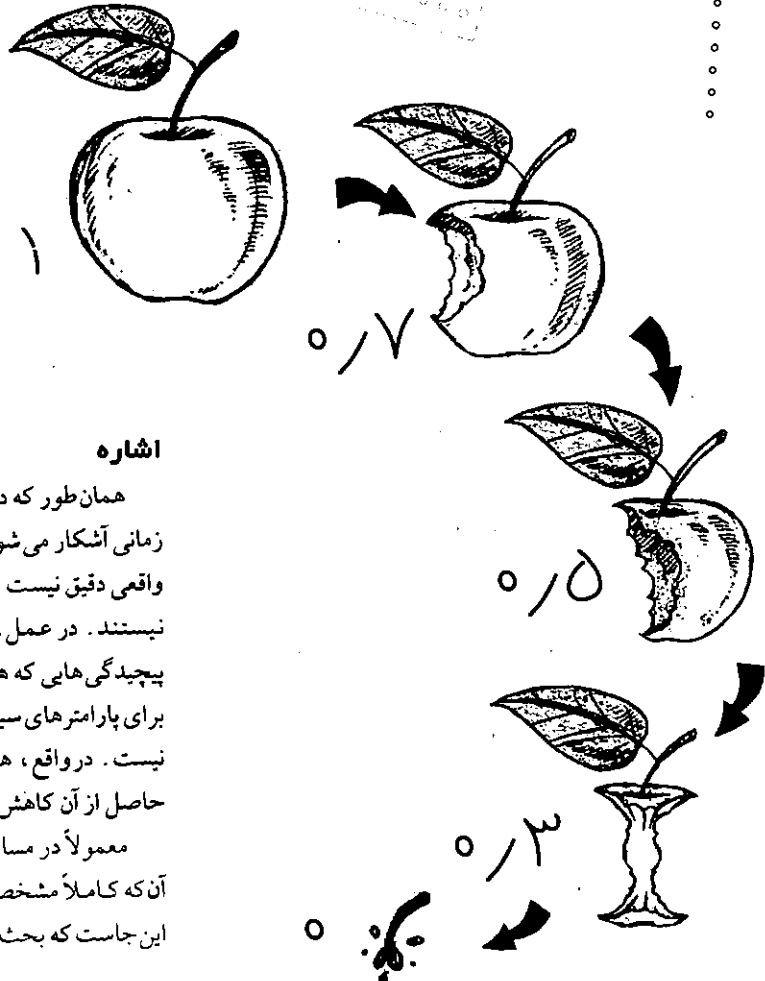


عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
• دکتر محمدعلی فریبرزوی عراقی

مقدمه‌ای بر

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

(۳)



اشاره

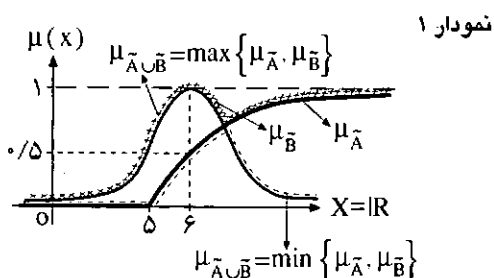
همان‌طور که در دو قسمت قبل اشاره شد، اهمیت بحث فازی زمانی آشکار می‌شود که اطلاعات ما در بررسی رفتار یک سیستم واقعی دقیق نیست و داده‌های اولیه به طور یقین برای ما مشخص نیستند. در عمل، هنگام مدل‌سازی یک سیستم، با توجه به پیچیدگی‌هایی که هر سیستم دارد، امکان رسیدن به مقادیری دقیق برای پارامترهای سیستم و داده‌های اولیه، در بسیاری از مواقع مقدور نیست. در واقع، هر قدر سیستم پیچیده‌تر باشد، دقت مدل ریاضی حاصل از آن کاهش می‌یابد.

معمولاً در مسائل عملی، با مقادیری سروکار داریم که به جای آن که کاملاً مشخص باشند، به طور تقریبی مشخص هستند. این جاست که بحث فازی بودن این مقادیر مطرح می‌شود. در واقع،

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 5 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-5)^2}} & x > 5 \end{cases}, \mu_{\bar{B}}(x) = \frac{1}{1 + (x-6)^2}$$

ملاحظه می‌کنیم که اولاً به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:
 $0 \leq \mu_{\bar{A}}(x) \leq 1$ و $0 \leq \mu_{\bar{B}}(x) \leq 1$ ثانیاً هر قدر x از عدد ۵ دورتر می‌شود، مقدار $\mu_{\bar{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر خواهد شد. هم‌چنین:
 $\mu_{\bar{B}}(6) = 1$

در نمودار ۱، توابع عضویت $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و هم‌چنین توابع عضویت $\bar{A} \cap \bar{B}$ و $\bar{A} \cup \bar{B}$ براساس تعریف ماکزی‌مم و مینی‌مم از اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی مشخص شده‌اند.

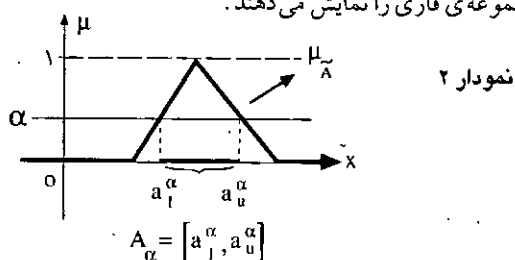


در ادامه چند مفهوم اساسی در مجموعه‌های فازی را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $\bar{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشد. در این صورت مجموعه‌ی « α -برش» $\bar{A}^\alpha$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\bar{A}}(x) \geq \alpha\}$$

که در آن: $0 \leq \alpha \leq 1$. به عبارت دیگر، α -برش یک مجموعه‌ی فازی عبارت است از اعضای از مجموعه‌ی مرجع که «درجه‌ی عضویت» آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی α باشد. α -برش یک مجموعه فازی یک مجموعه قطعی (غیر فازی) است که می‌توان آن را به صورت یک بازه‌ی حقیقی نظیر $[a_1^\alpha, a_u^\alpha]$ یا $[a_1^\alpha, +\infty)$ نوشت و در آن، a_1^α و a_u^α به ترتیب نقاط ابتدا و انتهای این بازه فرض شده‌اند. نمودارهای ۲ و ۳ نمونه‌هایی از α -برش یک مجموعه‌ی فازی را نمایش می‌دهند.



مفهوم فازی بودن زمانی مطرح می‌شود که نوعی عدم قطعیت در مقادیر یک مسئله به وجود می‌آید. امروزه این اطمینان حاصل شده است که تنها با مفاهیم مجموعه‌های قطعی و مقادیر صفر و یک نمی‌توان رفتار سیستم‌ها را به نمایش درآورد. زیرا این رفتارها به حالت فازی گرایش دارند و نوعی ابهام در اطلاعات اولیه وجود دارد که برای توصیف آن‌ها ناچار باید به مقادیری بین صفر و یک رجوع کنیم. مدل‌های ریاضی که در علوم فنی و مهندسی به کار می‌روند، براساس مفروضات و قوانینی طراحی می‌شوند که به سبب آن‌ها، مدل حاصل دقیق نخواهد بود. چرا که هنگام ساخت مدلی از یک سیستم واقعی، ساده‌سازی‌هایی انجام می‌گیرند و از برخی عوامل صرف‌نظر می‌شود. این به معنای آن است که نوعی ابهام در مدل حاصل ایجاد کرده ایم. حال برای بررسی این ابهام، نیاز است، به تئوری مجموعه‌های فازی رجوع کنیم.

لازم به ذکر است، با مدل‌های احتمالاتی و قوانین احتمال نمی‌توان این ابهام را توصیف کرد. در بحث احتمالات، به دنبال آن هستیم که با اطلاعات فعلی، چه میزان اطمینان به وقوع یک رویداد در آینده داریم و در واقع میزان انتظار ما برای وقوع یک رویداد تصادفی پیش‌بینی می‌شود. در حالی که در بحث مجموعه‌های فازی، میزان احتمال وقوع یا عدم وقوع یک رویداد اهمیت ندارد، بلکه مفاهیمی چون بزرگ بودن، بسیار کوچک بودن، تقریباً برابر بودن، خیلی نزدیک بودن و مانند آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، قطعی بودن به معنای دو ارزشی بودن (ارزش‌های صفر یا یک)، و فازی بودن به معنای چندارزشی بودن (ارزش‌های از صفر تا یک) یا چند مقداری بودن است. در طراحی یک سیستم که رفتاری فازی دارد، ما باید انواع این مقادیر و ارزش‌ها را لحاظ کنیم.

پروفسور عسگرزاده، در سال ۱۹۶۵ همین نظریه‌ی مجموعه‌های چند مقداری را مطرح کرد. نام «فازی» را روی آن نهاد و آن را به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های دو مقداری (صفر و یک) ارائه کرد. از آن سال تاکنون، محاسبات بر مبنای منطق فازی یا منطق چندمقداری، در میان دانشمندان و محققان جهان جایگاه خاصی یافته و کاربردهای وسیعی در علوم گوناگون نظیر ریاضی، آمار، اقتصاد، مدیریت، فنی و مهندسی و... داشته است. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

در قسمت قبل، ضمن معرفی متمم، اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی، دیدیم که برخی خواص نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی نظیر «قانون دمورگان»، در مجموعه‌های فازی نیز برقرارند، ولی روابطی چون $\bar{A} \cup \bar{A}^c = X$ یا $\bar{A} \cap \bar{A}^c = \emptyset$ در صورتی که $\bar{A}$ مجموعه‌ای فازی باشد، برقرار نیستند. فرض کنیم $\bar{A}$ مجموعه‌ی فازی بسیار بزرگ‌تر از ۵ و $\bar{B}$ مجموعه‌ی فازی تقریباً ۶ باشد. تابع عضویت هر یک از این مجموعه‌های فازی را می‌توان به این صورت بیان کرد:

حالت ایده آل با درجه‌ی عضویت ۱ زمانی است که منزل دارای ۴ اتاق خواب باشد و هر قدر از ۴ دورتر می‌شویم، درجه‌ی عضویت کوچک‌تر می‌شود. در این حالت مجموعه‌ی تکیه گاه $\tilde{A}$ به صورت زیر است:

$$S(\tilde{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

هم چنین، نمونه‌هایی از α -برش و α -برش قوی $\tilde{A}$ به ازای $\alpha = 0/3, 0/5, 1$ از این قرار است:

$$A_{0/3} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad A'_{0/3} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_{0/5} = \{2, 3, 4, 5\} \quad A'_{0/5} = \{2, 4, 5\}$$

$$A_1 = \{4\} \quad A'_1 = \emptyset$$

عدد اصلی و عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$|\tilde{A}| = 0/1 + 0/5 + 0/8 + 1 + 0/7 + 0/3 = 3/4$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3/4}{1} = 0/34$$

حال مجموعه α -برش مجموعه‌ی فازی تقریباً ۱۰ را به دست می‌آوریم. گیریم $\tilde{A}$ نام این مجموعه باشد. تابع عضویت $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1 + (x - 10)^2} \geq \alpha: \text{ لذا } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha: \text{ حال قرار می‌دهیم:}$$

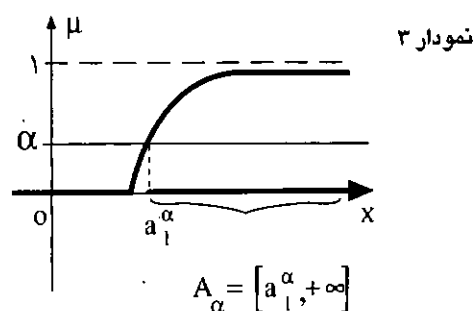
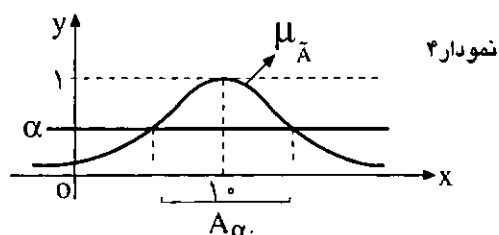
$$\text{و از آن جا: } 1 + (x - 10)^2 \leq \frac{1}{\alpha} \text{ در نتیجه: } (x - 10)^2 \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \text{ به این ترتیب:}$$

$$|x - 10| \leq \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \Rightarrow 10 - \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \leq x \leq 10 + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}$$

بنابراین:

$$A_{\alpha} = \left[10 - \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}, 10 + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \right], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

ملاحظه می‌کنیم که: $A_1 = \{10\}$ ، $S(\tilde{A}) = \mathbb{R}$ ، نمودار ۴، را به ازای یک $0 < \alpha \leq 1$ مشخص می‌کند:



مجموعه α -برش را مجموعه‌ی α -سطح یا α -تراز نیز می‌نامند. هم چنین می‌توان گفت: $A_{\alpha} = X$. مجموعه‌ی α -برش قوی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A'_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

به عبارت دیگر، α -برش قوی $\tilde{A}$ مجموعه اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها از α بزرگ‌تر باشند. هم چنین، «تکیه گاه» مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

به عبارت دیگر، تکیه گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ی اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها مثبت باشد. در صورتی که $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی متناهی باشد، «عدد اصلی» $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

و به وسیله‌ی آن، عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

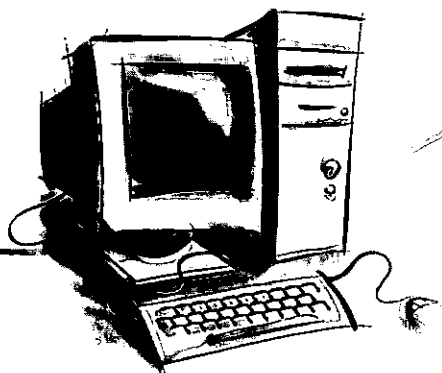
$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

که در آن $|X|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی متناهی X است. برای درک بهتر تعاریف فوق به مثال زیر توجه می‌کنیم:

مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت منازل راحت برای یک خانواده‌ی ۴ نفری در نظر می‌گیریم. اگر راحتی را بر اساس تعداد اتاق خواب‌ها منظور کنیم و $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ را مجموعه‌ی تعداد اتاق خواب‌های منزل فرض کنیم، آن گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\tilde{A} = \{(1, 0/1), (2, 0/5), (3, 0/8), (4, 1), (5, 0/7), (6, 0/3)\}$$

ملاحظه می‌کنیم برای اعضای ۷ تا ۱۰، درجه‌ی عضویت صفر در $\tilde{A}$ منظور شده است. به همین لحاظ در $\tilde{A}$ مطرح نشده‌اند.



معرفی سایت های ریاضی جهان

• احسان یارمحمدی

- عبارات شامل متغیرها، جانشین سازی
(Expressions Involving Variables, substitution)
- چند جمله ای ها، عبارت ها و معادله های گویا
(Polynomials, Rational Expressions and Equations)
- معادلات پیچیده رادیکالی شامل ریشه ها
(Radicals Complicated Equations Involving Roots)
- معادله های درجه ی دوم (Quadratic Equations)
- نامعادله ها (Inequalities)
- دستگاه های معادلات غیر خطی
(Systems of Equations that are not Linear)
- جبر ۲ (Algebra II)
- اعداد مختلط (Complex Numbers)
- جبر خطی (معادلات غیر خطی)
(Linear Algebra (Not Linear Equations))
- مقدمه ای بر بردارها، جمع و ضرب
(Introduction to Vectors, Addition and Scaling)
- ماتریس ها، دترمینان، قاعده ی کرامر
(Matrices, Determinant, Cramer Rule)
- نما و لگاریتم در توابع توانی
(Exponent and Logarithm as Functions of Power)
- توابع گویا، آنالیز و ترسیم
(Rational Functions, Analyzing and Graphing)
- مقاطع مخروطی - بیضی، سهمی، هذلولی
(Conic Sections - Ellipse, Parabola, Hyperbola)
- دنباله های اعداد، سری ها و چگونگی مجموع آن ها
(Sequences of Numbers, Series and How to Sum them)

ادامه در صفحه ی ۵۰

مفهوم حاصل ضرب دو مجموعه ی فازی از مفاهیم مهم در تئوری مجموعه های فازی است که آن را چنین تعریف می کنیم: فرض کنیم $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_2$ دو مجموعه ی فازی به ترتیب روی مجموعه های مرجع X_1 و X_2 باشند.

در این صورت مجموعه ی فازی $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ روی $X_1 \times X_2$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 = \left\{ \left[(x_1, x_2), \mu_{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2}(x) \right] \mid x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \right\}$$

که در آن:

$$\mu_{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2}(x) = \min \left\{ \mu_{\bar{A}_1}(x_1), \mu_{\bar{A}_2}(x_2) \right\}$$

این حاصل ضرب را ضرب دکارتی یا کارتیزین $\bar{A}_1$ در $\bar{A}_2$ نیز می نامند. برای مثال، فرض کنیم:

$$\bar{A}_1 = \{(3, 0/5), (5, 1), (7, 0/6)\} \text{ و } X_1 = X_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$$

و $\bar{A}_2 = \{(3, 1), (5, 0/6)\}$ در این صورت:

$$\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 = \left\{ [(3, 3), 0/5], [(3, 5), 0/5], [(5, 3), 1], [(5, 5), 0/6], [(7, 3), 0/6], [(7, 5), 0/6] \right\}$$

همان طور که ملاحظه می کنیم، عمل ضرب دکارتی دو مجموعه ی فازی شبیه ضرب دکارتی دو مجموعه ی قطعی در نظریه ی مجموعه های کلاسیک انجام می شود، با این تفاوت که هر زوج مرتب دارای یک درجه ی عضویت است. در قسمت های بعد سایر اعمال ریاضی مهم در نظریه ی مجموعه های فازی و نیز چند مفهوم اساسی نظیر مجموعه های محدب و نرمال را معرفی می کنیم.



1. α -Level, α -Cut
2. membership degree
3. Strong α -cut
4. Support
5. Cardinal number



۱. منهاج، دکتر محمدباقر، محاسبات فازی، انتشارات دانش نگار، ۱۳۸۶.
۲. شوندی، دکتر حسن. نظریه ی مجموعه های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه، ۱۳۸۵.
3. Fuzzy set theory and its applications, H.J. Zimmermann, third edition, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.