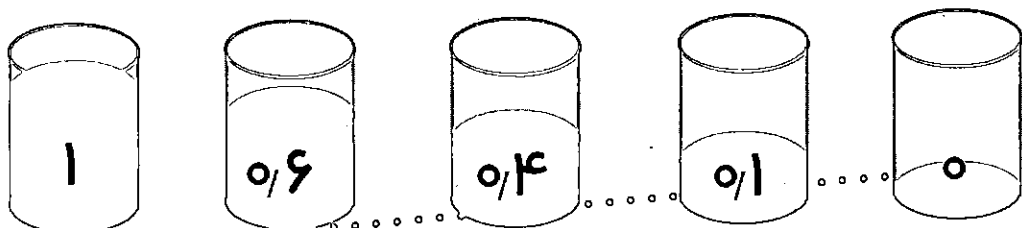
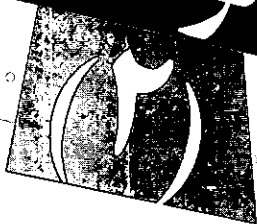


عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی  
● دکتر محمدعلی فریبزی عراقی

# مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی



## یادآوری

از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی بیش از ۴۰ سال می‌گذرد و تاکنون بیش از ۱۵ هزار مقاله‌ی علمی توسط دانشمندان جهان درباره‌ی منطق فازی و کاربردهای آن در مجلات معتبر علمی منتشر شده‌اند. این اهمیت نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی را که ابتدا مخالفان زیادی داشت، مشخص می‌کند. پیدایش این نظریه سبب شد، منطق دوگانه‌ی (سیاه و سفید) ارسطویی به منطق چندارزشی (خاکستری) تبدیل شود و به طراحی ماشین‌هایی هوشمند انجامید که تا قبل از معرفی این منطق، قادر به تشخیص مفاهیمی به جز صفر و یک نبودند.

ایده‌ی اساسی در منطق فازی آن است که برای هر حالت ممکن همیشه نمی‌توان یک قاعده‌ی خاص را به کار برد. تعداد قواعدی که بتوانند هر حالت را به طور دقیق تعریف کنند، بسیار محدود است.

در بخش پیشین به شرح تاریخچه‌ای از پیدایش منطق فازی و مجموعه‌های فازی پرداختیم. اشاره کردیم که بنیان‌گذار نظریه‌ی فازی پروفسور لطفی عسگرزاده، استاد «دانشگاه برکلی» آمریکا بود که در سال ۱۹۶۵ با ارائه‌ی اولین مقاله‌ی خود، مجموعه‌های فازی را به جهان علم شناساند. مادر ایشان روس و پدر ایشان ایرانی بود. وی در سن ۱۰ سالگی در سال ۱۹۳۱ میلادی به همراه خانواده به ایران مراجعت کرد و پس از طی تحصیلات متوسطه در «دبیرستان البرز» تهران (کالج البرز سابق)، در سال ۱۹۴۲ موفق به اخذ درجه‌ی لیسانس رشته‌ی برق و الکترونیک از دانشگاه تهران شد. طی جنگ جهانی دوم بود که او برای ادامه‌ی تحصیلات به کشور آمریکا رفت و در نهایت در سال ۱۹۴۹ درجه‌ی دکترای خود را از دانشگاه کلمبیا در رشته‌ی مهندسی برق دریافت داشت.

این قواعد تنها نقاط گسسته‌ای از تمام حالات پیوسته‌ی ممکن را، مشخص می‌کنند و مابا ترکیب این قواعد می‌توانیم، تقریبی برای یک حالت مشخص را به دست آوریم. منطق فازی، یک مدل ریاضی در اختیار ما می‌گذارد که تحت آن می‌توان تصمیم‌گیری کرد و مراحل تعیین مقدار را به شکل الگوریتم نشان داد. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

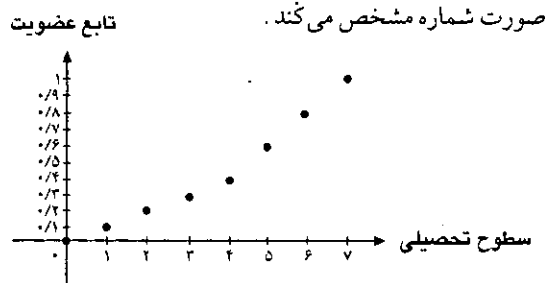
در قسمت قبل مجموعه‌ی فازی  $\bar{A}$  را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)) | x \in X\}$$

که در آن،  $X$  مجموعه مرجع (جهانی) و  $\mu_{\bar{A}}$  تابع عضویت مجموعه‌ی  $\bar{A}$  است. در این قسمت ابتدا چند مثال از یک مجموعه‌ی فازی را بیان می‌کنیم. چون مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت خود مشخص می‌شود، لذا برای معرفی یک مجموعه‌ی فازی باید تابع عضویت مناسبی را که توصیف قابل قبولی از آن مجموعه‌ی فازی باشد، بیان کرد و خواهیم دید که تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی منحصر به فرد نیست.

ابتدا مجموعه‌ی فازی افراد باسواد جامعه را در نظر می‌گیریم. در این حالت، مقادیر تابع عضویت را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

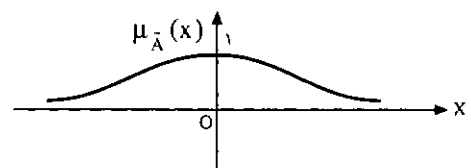
و ۰/۱  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات ابتدایی و ۰  $\Rightarrow$  افراد بی‌سواد و ۰/۳  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات دبیرستان و ۰/۲  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات راهنمایی و ۰/۶  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات لیسانس و ۰/۴  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات فوق‌دپلم ۱  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات دکترا و بالاتر و ۰/۸  $\Rightarrow$  افراد با تحصیلات فوق‌لیسانس نمودار زیر نمایشی از تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی است که در آن، محور افقی سطوح تحصیلی هشت‌گانه مذکور را به صورت شماره مشخص می‌کند.



به عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً صفر را در نظر می‌گیریم. اگر  $\bar{A}$  نام این مجموعه‌ی فازی باشد، تابع عضویت  $\mu_{\bar{A}}$  را می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

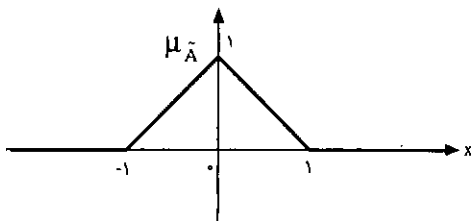
شکل زیر این تابع را نمایش می‌دهد.



ملاحظه می‌کنیم، هر قدر به عدد صفر نزدیک‌تر شویم، مقدار تابع عضویت به حداکثر خود یعنی ۱ نزدیک می‌شود و هر قدر از صفر دور شویم، مقدار تابع عضویت به حداقل خود یعنی ۰ نزدیک می‌شود. اما فقط این تابع توصیفی برای مجموعه‌ی فازی  $\bar{A}$  نیست و توابع دیگری را هم می‌توان معرفی کرد که به عنوان تابع عضویت این مجموعه به کار روند. مثلاً  $\mu_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ضابطه‌ی دیگری برای تابع عضویت  $\bar{A}$  است که در آن:  $\mu_{\bar{A}}(0) = 1$ . هم چنین تابع عضویت  $\mu_{\bar{A}}$  را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

شکل زیر نمایشی از این تابع عضویت را مشخص می‌کند. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای  $|x| \geq 1$ ، صفر تعریف شده است.



به این ترتیب برای یک مجموعه‌ی فازی می‌توان چندین تابع عضویت انتخاب کرد.

حال مجموعه‌ی فازی تقریباً ۱۰ را در نظر می‌گیریم. اگر  $\bar{B}$  نام این مجموعه‌ی فازی باشد، نمونه‌ای از تابع عضویت برای آن عبارت است از:

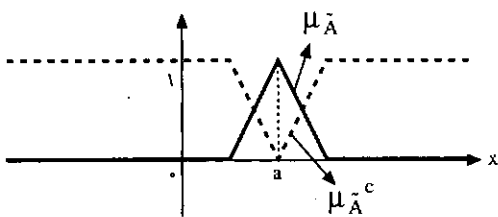
$$\mu_{\bar{B}}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}$$

در این‌جا نیز ملاحظه می‌شود که  $\mu_{\bar{B}}(10) = 1$  و هر قدر از عدد ۱۰ دورتر می‌شویم، مقدار  $\mu_{\bar{B}}$  به صفر نزدیک‌تر می‌شود. برای این مجموعه‌ی فازی توابع عضویت دیگری پیدا کنید. شاید پس از قدری بررسی و دقت بتوانید تابع عضویت  $\mu_{\bar{B}}$  را با ضابطه‌ی زیر مطرح کنید.

$$\mu_{\bar{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{20-x}{10} & 10 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\bar{A}}(x), \quad x \in X$$

شکل زیر نمونه‌ای از تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی و مکمل آن را نمایش می‌دهد:



۳. فرض کنیم  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  دو مجموعه‌ی فازی در  $X$  باشند. در این صورت اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\}, \quad \forall x \in X$$

۴. فرض کنیم  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  دو مجموعه‌ی فازی در  $X$  باشند. در این صورت، اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\}, \quad \forall x \in X$$

سؤالی که برای خواننده پیش می‌آید این است که: «آیا خواص نظریه‌ی مجموعه‌های قطعی نظیر  $A \cap A^c = \emptyset$ ،  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  در این جا  $A^c$  به معنای متمم  $A$  است. در حالت کلی نمی‌توان گفت تمام خواص مجموعه‌های قطعی در مجموعه‌های فازی برقرار است، چرا که ما در مجموعه‌های فازی با توابع عضویت آن‌ها کار می‌کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

فرض کنید:  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ . دو مجموعه‌ی  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  را در  $X$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{A} = \{(2, 0/4), (3, 0/6), (4, 0/8), (5, 1), (6, 0/8), (7, 0/6), (8, 0/4)\}$$

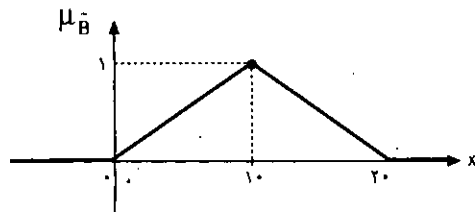
$$\bar{B} = \{(1, 0/2), (2, 0/4), (4, 0/9), (5, 1), (7, 0/6), (8, 0/3)\}$$

اولاً مطلوب است  $\bar{A}^c$  و  $\bar{B}^c$ ، ثانیاً تحقیق کنید آیا:  $\bar{A} \cup \bar{A}^c = X$  و  $\bar{A} \cap \bar{A}^c = \emptyset$  و ثالثاً تحقیق کنید: آیا  $(\bar{A} \cup \bar{B})^c = \bar{A}^c \cap \bar{B}^c$ .

حل: اولاً، توجه می‌کنیم که در  $\bar{A}$  عضوی نظیر ۱ در  $X$  با درجه‌ی عضویت ۰ وجود دارد که چنین اعضایی را در مجموعه‌ی فازی معمولاً نمی‌نویسند، ولی این اعضا در  $\bar{A}^c$  با درجه‌ی عضویت ۱ وجود دارند. برای سایر اعضا نیز درجه‌ی عضویت را از یک کم می‌کنیم. لذا:

$$\bar{A}^c = \{(1, 1), (2, 0/6), (3, 0/4), (4, 0/2), (6, 0/2), (7, 0/4), (8, 0/6), (9, 1), (10, 1)\}$$

نمودار این تابع عضویت به شکل زیر است.



همان‌طور که در مثال‌های فوق مشاهده شد، در معرفی ضابطه‌ی تابع عضویت، به عضو یا اعضای از مجموعه‌ی مرجع که به طور کامل ویژگی مربوطه را دارند، عدد ۱ را نظیر می‌کنیم و برای سایر اعضای مجموعه مرجع، بسته به آن که چه قدر از ویژگی مورد نظر دورتر هستند، مقادیری از صفر تا کمتر از یک را نظیر می‌کنیم. مثال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی است که بیش از یک عضو عدد ۱ را به خود نظیر می‌کند. مجموعه‌ی فازی اعداد حقیقی تقریباً بین ۲۰ و ۴۰ را در نظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی که آن را با  $\bar{C}$  نمایش می‌دهیم، با ضابطه‌ی زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\bar{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-20)^2} & 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{1+(x-40)^2} & 40 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این حالت، برای تمامی مقادیر از ۲۰ تا ۴۰ مقدار تابع عضویت ۱ تعریف می‌شود.

نکته: هر عدد حقیقی  $a \in \mathbb{R}$  را می‌توان متناظر با یک مجموعه‌ی فازی  $\bar{A}$  در نظر گرفت که تابع عضویت زیر را داراست:

$$\mu_{\bar{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

در ادامه، به معرفی چند عمل مهم در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. ابتدا مفهوم زیرمجموعه بودن و تساوی دو مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کنیم.

۱. فرض کنیم  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  دو مجموعه‌ی فازی باشند که در مجموعه‌ی مرجع  $X$  تعریف شده‌اند. در این صورت:

$$\bar{A} \subset \bar{B} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(x), \quad \forall x \in X \quad \text{الف)}$$

$$\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = \mu_{\bar{B}}(x), \quad \forall x \in X \quad \text{ب)}$$

۲. مکمل مجموعه‌ی فازی  $\bar{A}$  در  $X$  را با  $\bar{A}^c$  نمایش می‌دهیم و به این صورت تابع عضویت آن را به دست می‌آوریم:

$$\bar{B}^c = \{(1,0/8), (2,0/6), (3,1), (4,0/1), (6,1), (7,0/4), (8,0/7), (9,1), (10,1)\}$$

ملاحظه می کنیم، درجه ی عضویت ۵ در هر دو مجموعه ی فازی فوق صفر است، لذا این عضو قید نشده است.

ثانیاً، با توجه به تعاریف min-max در اشتراک و اجتماع دو مجموعه ی فازی داریم:

$$\bar{A} \cap \bar{A}^c = \{(2,0/4), (3,0/4), (4,0/2), (6,0/2), (7,0/4), (8,0/4)\}$$

و:

$$\bar{A} \cup \bar{A}^c = \{(1,1), (2,0/6), (3,0/6), (4,0/8), (5,1), (6,0/8), (7,0/6), (8,0/6), (9,1), (10,1)\}$$

مشاهده می کنیم که در تنظیم این دو مجموعه، به ترتیب مینی مم و ماکزیمم درجه های عضویت هر یک از اعضای  $X$  در نظر گرفته می شود. در این حالت:  $\bar{A} \cup \bar{A}^c \neq X$  و  $\bar{A} \cap \bar{A}^c \neq \phi$  می کنیم که  $\phi$  و  $X$  مجموعه هایی قطعی هستند. به این ترتیب این دو خاصیت در حالت فازی برقرار نیستند.

ثالثاً:

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{(1,0/2), (2,0/4), (3,0/6), (4,0/9), (5,1), (6,0/8), (7,0/6), (8,0/4)\}$$

$$\Rightarrow (\bar{A} \cup \bar{B})^c = \{(1,0/8), (2,0/6), (3,0/4), (4,0/1), (6,0/2), (7,0/4), (8,0/6), (9,1), (10,1)\}$$

و با توجه به مجموعه های  $\bar{A}^c$  و  $\bar{B}^c$  مذکور در قسمت اولاً، خواهیم داشت:

$$\bar{A}^c \cap \bar{B}^c = \{(1,0/8), (2,0/6), (3,0/4), (4,0/1), (6,0/2), (7,0/4), (8,0/6), (9,1), (10,1)\}$$

به این ترتیب:  $(\bar{A} \cup \bar{B})^c = \bar{A}^c \cap \bar{B}^c$

به طور کلی می توان ثابت کرد، براساس تعاریف min-max از اشتراک و اجتماع دو مجموعه ی فازی، قوانین دمورگان برقرار هستند؛ یعنی برای هر دو مجموعه ی فازی  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  در  $X$  داریم:

$$\begin{cases} (\bar{A} \cap \bar{B})^c = \bar{A}^c \cup \bar{B}^c \\ (\bar{A} \cup \bar{B})^c = \bar{A}^c \cap \bar{B}^c \end{cases}$$

در قسمت بعدی، به معرفی چند تعریف مهم دیگر در مجموعه های فازی و نیز عمل ضرب در مجموعه های فازی می پردازیم.



1. Fuzzy set theory and its applications, H. J.

Zimmermann, third edition, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، دکتر سید محمود طاهری، انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۷۵.















این مجموع مانند قبل، نشان می‌دهد که اگر سعی در ماکزیم کردن مقدار عبارت مورد نظر داریم، کافی است که اجازه دهیم  $a, b, c, d$  و مقادیر  $p$  و  $q$  را اختیار کند. اگر  $n$  عدد از این اعداد برابر  $p$  و  $n - 5$  عدد برابر  $q$  باشند، آن‌گاه سمت چپ برابر

$$n^2 + (5 - n)^2 + n(5 - n) \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = 25$$

$$+ n(5 - n) \left( \sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

می‌شود. مقدار ماکزیم  $n(5 - n)$  زمانی به دست می‌آید که  $n$  برابر ۲ یا ۳ باشد و در این حال خواهیم داشت:

$$n(5 - n) = 6$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

(USAMO, 1977).

۹. با استفاده از نابرابری AM - GM می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)} \leq \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3}$$

تابع  $x + \frac{2}{x}$  در بازه  $[1, 2]$  محدب است. بنابراین ماکزیم  $x + \frac{2}{x}$  را در یکی از نقاط انتهایی این بازه به دست می‌آورد. نیز، مقدار این تابع در هریک از نقاط انتهایی برابر ۳ است. این موضوع نشان می‌دهد که:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3} \leq n$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در این جا خاطر نشان می‌کنیم، همین ایده را می‌توان در اثبات صورت عمومی تر این نابرابری که از جی. ایچ. سولوسی<sup>۲</sup> است، و به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $x_i \in [a, b]$  برقرار است. یعنی نابرابری زیر - به کار برد:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{ab} \leq \left( \frac{a+b}{1+ab} n \right)^{1+ab}$$

(L. Panaitopol)



1. domain

2. W. L. Putnam Mathematical Competition

3. Gh. Söllösy