

مقالات کوتاه از مجلات

ریاضی معتبر جهان (۷)

● ب. ریچموند، ت. ریچموند

● ترجمه: نغمه شریک زاده

ویژگی همسطحی منطقه‌ها

همسطحی منطقه‌ها بهره‌ورند، توسع دهیم. واضح است که استوانه چنین است. آیا دیگرانی نیز موجودند؟ دو راه حل را که بسادگی، برای غیردانشجویان قابل وصولند، تاره یا فتن به این سؤال، از نظرگاه‌هایی متفاوت، ارائه می‌دهیم.

برای بیان دقیق سؤال، فرض می‌کنیم $y = g(x)$ ، خم نامنفی تکه‌ای - همواری، تعریف شده بر $[a, b]$ باشد، و حول محور x دوران نماید. منطقه‌ای به پهنای h ($h \leq b - a$) از رویه حاصله، بخشی از رویه محصور بین صفحات $x = x_0$ و $x = x_0 + h$ است، که در آن $x_0 \in [a, b - h]$. چه رویه‌های دورانی‌ای با ویژگی همسطحی منطقه‌ها «equal area zones property» (E.A.Z.) وجود دارند، چنان‌که به‌ازای هر پهنای $h \in [0, b - a]$ سطح رویه

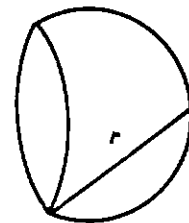
$$S(x, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} 2\pi g(t) \sqrt{1 + g'(t)^2} dt \quad (x \in [a, b-h])$$

از منطقه‌ای به پهنای h ، تنها تابعی از h بوده، مستقل از x باشد؟

دو نکته را می‌توان در باب دو رویه‌ای که می‌دانیم دارای ویژگی E.A.Z. هستند، کره و استوانه، ملحوظ داشت. نخست، ملاحظه می‌شود که خمهای مولد آنان، دایره و خط، تنها خمهای مسطح‌اند، با خمیدگی ثابت و نامنفی. دوم آن‌که، در تحقیق‌دارا بودن ویژگی E.A.Z. این دو رویه، آشکار می‌شود که در هر دو مورد، انتگرالده

بر سشی قدیمی که در بسیاری از کتب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به چشم می‌خورد، مسأله مناطق یک کره است: تحقیق کنید، چنانچه کره‌ای توسط دو صفحه موازی، h واحد جدا از یکدیگر، قطع شود، آنگاه، مساحت رویه منطقه بین دو صفحه مزبور، تنها به h بستگی دارد، و از موقع صفحات مستقل است. از آن‌جا که این ویژگی، همواره مورد توجه دانش‌آموزان بوده است، آشنا و شناخته شده است. این ویژگی پیامد بلافصل نتیجه زیر از ارشمیدس است که به کمک شکل تشریح شده است.

قضیه. مساحت رویه هر قطعه از کره برابر مساحت دایره‌ای است به شعاعی برابر با خطی از رأس قطعه مزبور تا نقطه‌ای بر دایره قاعده منطقه کره مورد بحث.



مساحت رویه πr^2

با بررسی کره مزبور، به مثابه رویه‌ای دورانی با محور تقارنی عمود بر صفحات قاطع آن، طبیعی است که پرسش معمول مذکور در فوق را، با طرح این پرسش که چه رویه‌های دورانی دیگری از ویژگی

چنانچه در بازه‌ای، $y = g(x)$ ، $y \equiv c$ ثابت خواهد بود، و رویه متناظر بر آن بازه، استوانه است. بنا به پیوستگی، اگر به ازای $x_0 \in [a, b]$ ، $g(x_0) \neq c$ ، آنگاه در بازه‌ای شامل x_0 ، $g(x) \neq c$ خواهد بود، و تفکیک متغیرها، چنین به دست خواهد داد:

$$\left[\left(\frac{c}{y} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} dy = \pm dx$$

با جایگذاری $u = c/y$ و انتگرالگیری به دست می‌آوریم:

$$\int \frac{c du}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} = \pm \int dx$$

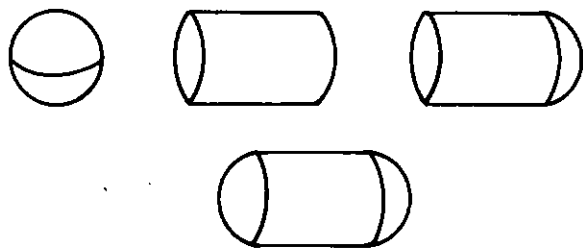
جانشینی مثلثاتی $u = \csc \theta$ ، به دست می‌دهد:

$$cu^{-1} \sqrt{u^2 - 1} = \pm x + k$$

یا

$$y^2 + (\pm x + k)^2 = c^2$$

از این صورت، روشن می‌شود که خم متناظر واقع بر I ، بخشی از نیم‌دایره‌ای است به شعاع c و مرکز واقع در $(\pm k, 0)$. این موضوع، همراه با همواری g ، مستلزم این است که، به ازای $x_0 < x_1$ ، چنانچه $g(x_0) = c = g(x_1)$ ، آنگاه به ازای هر $x \in [x_0, x_1]$ ، $g(x) = c$ ، به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که دوران خمی نامنفی و هموار رویه‌ای با ویژگی E.A.Z. به دست می‌دهد، اگر و تنها اگر رویه مزبور، کره، استوانه، «سیلوه» یا «کپسول» باشد.



تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی E.A.Z.

همگی این چهار رویه را می‌توان به صورت مناطقی از یک کپسول توصیف کرد؛ کپسولی که استوانه‌ای است به ارتفاع $h \geq 0$ ،

کافی برای دارا بودن ویژگی E.A.Z. است. در نخستین راه حل‌مان، نشان خواهیم داد که شرط مزبور، در مورد خم هموار $g(t)$ ، لازم نیز می‌باشد.

فرض می‌کنیم $g(t)$ بر $[a, b]$ ، هموار و نامنفی است. به ازای h ی ثابت، انتگرال سطح رویه $S(x, h)$ فوق،

صورت $S(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$ را خواهد داشت، که در آن

$$f(t) = 2\pi g(t) \sqrt{1 + g'(t)^2}$$

$g(t)$ دارای ویژگی E.A.Z. باشد، به ازای h ی ثابت، $S(x)$ ثابت خواهد بود، بنابراین:

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \int_x^c f(t) dt + \frac{d}{dx} \int_c^{x+h} f(t) dt = 0$$

با به کار بردن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، در می‌یابیم که به ازای هر $x \in [a, b-h]$ ، $f(x) = f(x+h)$ ، بنابراین $f(x)$ بر $[a, b]$ ، دوره‌ای است. از آن جا که این بحث، به ازای هر $h \in [0, b-a]$ برقرار است، ثابت بودن انتگرالده $f(t)$ مقرر می‌گردد.

حال، برای تعیین این‌که به ازای چه خمهای $y = g(x)$ ،

انتگرالده $f(x)$ ثابت است، باید معادله دیفرانسیل زیر را حل کرد:

$$y \sqrt{1 + y'^2} = c$$

اگر $c = 0$ ، آنگاه $g(x) \equiv 0$ ، بنابراین می‌توان فرض کرد که $c \neq 0$. نتیجه می‌شود که به ازای هر x ، $y = g(x) \neq 0$ ، و با مربع کردن طرفین معادله و حل آن بر حسب y' ، به دست می‌آوریم:

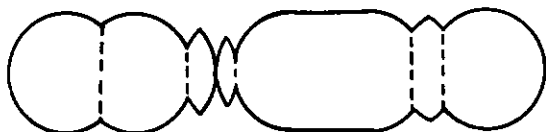
$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \quad (1)$$

با g درباره I ، سطح بزرگتری از منطقه‌ای به همان پهنای تولید شده با $c(x)$ دارد. بنابراین، به ازای هر x ، $g(x) \leq r$ ، که در این صورت، به ازای هر x_0 ، z_0 ، $g(x_0) = c(z_0)$ ، چنان که $g'(x_0) \neq c'(z_0)$ ، اگر $g'(x_0) \neq c'(z_0)$ ، آنگاه، چون در بالا، نتیجه می‌گیریم که $\varepsilon > 0$ وجود است، چنان که به ازای δ ، $|\delta| < \varepsilon$ ،

$$\left| 2\pi g(x_0 + \delta) \sqrt{1 + g'(x_0 + \delta)^2} - 2\pi c(z_0 + \delta) \sqrt{1 + c'(z_0 + \delta)^2} \right| > 0.$$

و متناقض با اینکه g و c رویه‌هایی با مناطق همسطح تولید می‌کنند. بنابراین $g'(x_0) = c'(z_0)$ ، هرگاه $g(x_0) = c(z_0)$ ، نتیجه می‌شود که بر هر بازه‌ای که g وارونپذیر است، یعنی، بر هر بازه‌ای که $g'(x) \neq 0$ ، یا هم ارز آن، $g(x) \neq r$ ، g با تبدیل افقی بخشی از خم c ، سازگار است. استفاده از بخشی بر مبنای همواری، چنانچه در حل پیشین ارائه شد، نتیجه‌ای مبنی بر اینکه رویه تولید شده با g ، باید منطقه‌ای از یک کپول باشد را به دست خواهد داد.

با نیم‌کره‌ای جفت شده به هر انتهای آن. در پی آن، معادله دیفرانسیل (۱) می‌تواند با جانشینی $u = y^2$ حل شود، که به معادله دیفرانسیل دیگری منجر خواهد شد که تنها با استفاده از قاعده توان، قابل انتگرالگیری است. همچنین، پاسخهای (۱) فوق، این حقیقت را بیان می‌دارند که پوش خانواده‌ای از پاسخهایی به معادله دیفرانسیلی از مرتبه اول، پاسخی به معادله دیفرانسیل نیز می‌باشد. پوش کره‌هایی به شعاع c ، به مرکز واقع در $(\pm k, 0)$ ، استوانه‌ای به مرکز c است. نتیجه می‌شود که اگر $g(x)$ خم تکه‌ای - هموار نامنفی پیوسته‌ای باشد، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، آنگاه رویه مزبور باید «زنجره‌ای از مهره‌هایی باشد که هر مهره منطقه‌ای از کپولی به شعاع ثابت ناست.



زنجره‌ای از مناطق یک کپول

گذشته از اثبات مستقیمی که در بالا داده شد، باشهودی کافی، می‌توان بحث منحصربه‌فردی را تا نشان دادن این که مناطق یک کپول، تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی E.A.Z. اند، دنبال کرد. چون بخشی که در زیر می‌آید.

فرض می‌کنیم g خم نامنفی همواری بر $[a, b]$ بوده، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، و با همان تابع مساحت رویه

$S(h) = 2\pi rh$ باشد، آن چنان که کره مربوطه با $c(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تولید شده باشد. اگر $g(x_0) > r$ ، آنگاه

$$2\pi g(x_0) \sqrt{1 + g'(x_0)^2} > 2\pi r = 2\pi c(x_0) \sqrt{1 + c'(x_0)^2}$$

و بنابه پیوستگی، $\varepsilon > 0$ وجود دارد، چنان که به ازای هر $x \in I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a, b]$

$$2\pi g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2} > 2\pi c(x) \sqrt{1 + c'(x)^2}$$

که این متناقض خواهد بود با این که مساحت رویه هر منطقه تولید شده

نشریه انجمن فیزیک

به جای ستاره‌ها چه ارقامی می‌توان قرار داد تا این تساوی برقرار شود:

$$***4**x7 = 1742*56$$

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحه ۹۶