

از: The Mathematics Teacher May 1992
 Thomas W. Shilgalis استاد ریاضیات در دانشگاه ایالتی ایلینوی
 است. وی در هندسه و کامپیوتر در آموزش ریاضیات تخصص دارد.

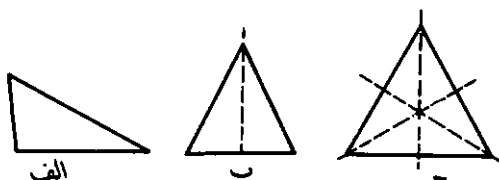
ترجمه نغمه شریک زاده

ویراستار: غلامرضا یاسی پور

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۴)

تقارن در چند ضلعیهای نامنتظم

مثلث باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن را نصف کند. یک خط تقارن دو ضلع همنهشت از مثلث را به دست می دهد، دو ضلعی که یکدیگر را در رأسی که محور تقارن مزبور از آن می گذرد، تلاقی می کنند. دومین محور تقارن، دو ضلع همنهشت از مثلث را که یکی از آنها می تواند متمایز از دوتای اولی باشد، به دست می دهد، پس مثلث متساوی الاضلاع خواهد شد. بدین ترتیب مثلی که بیش از یک محور تقارن دارد حتماً متساوی الاضلاع بوده، سه خط تقارن خواهد داشت.



شکل ۱. مثلث هایی با صفر (الف)

یک (ب)، سه (ج) محور تقارن

چهار ضلعیها

در مثلثها ویژگیهای «متساوی الاضلاع» بودن و «متساوی الزوایا» بودن، لازمه یکدیگر هستند، ولی برای چند ضلعیهای بایش از سه ضلع چنین نیست. در شکل ۲ چهار ضلعیهای می بینیم با صفر (الف)، یک (ب)، دو (ج و د)، چهار (ه) محور تقارن، اما هیچ یک از آنها سه محور تقارن ندارند. مستطیل نامربع (ج) متساوی الزوایاست، حال آنکه متساوی الاضلاع نیست و لوزی نامربع (د) متساوی الاضلاع است، حال آنکه متساوی الزوایا نیست.

هدف از این مقاله بررسی تقارنهای دو طرفه در چند ضلعیهای محدب نامنتظم است. این که آنها می توانند چند محور تقارن داشته باشند، پرسشی است که در یک دوره از موضوعاتی در هندسه قابل طرح است و به اعتقاد من بحثها و حدسیات پرباری را میان آموزگاران ریاضی دوره دبیرستان موجب می شود.

البته بررسی تقارن اشکال مسطح در کلاسهای درسی معمول است و در بسیاری از سطوح اجرا می شود. در بررسیهایی از این دست تصور نادیده انگاشتن چند ضلعیهای منتظم با همه فراوانیشان در داشتن هر دو گونه محورهای تقارن دو طرفه و دورانی مشکل است، ولی مسائل جالبی نیز در رابطه با تقارنهایی که چند ضلعیهای نامنتظم دارند، موجود است. در این صورت اجازه بدهید که توجهمان را به همین مسائل معطوف کنیم.

مثلثها

بگذارید ابتدا مثلثها را مورد بررسی قرار دهیم. شکل ۱ مثلثهایی را نشان می دهد که صفر (الف)، یک (ب) و سه (ج) محور تقارن دارند. محورهای تقارن مورد بحث خط چین شده اند. آیا یک مثلث می تواند دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد؟ تجربه ای کوچک با مداد و کاغذ پاسخی منفی را پیشنهاد می کند. برای اثبات، ابتدا متوجهیم که یک خط تقارن از یک

به پیش ...

البته ما به سوی یافتن قانونی پیش می‌رویم که قادر باشد بیشترین تعداد خطوط تقارنی را که یک n ضلعی نامنتظم می‌تواند داشته باشد، معین کند. ملاحظه کردیم که پاسخها برای زمانی که n برابر ۳ و ۴ بود، به ترتیب ۱ و ۲ است. ممکن است در این مقطع یکی دو حدس به ذهنمان خطور کند، اما در واقع به اطلاعات بیشتری نیازمندیم. پس مقادیر ۵ تا ۱۱ از n را در شکلهای ۹ - ۲ در نظر می‌گیریم. هریک از این شکلهای n ضلعی منتظم (قسمت ب) از شکل مزبور و یک n ضلعی نامنتظم قسمت (الف) از شکل مزبور را با بیشترین تعداد محورهای تقارن نشان می‌دهد. در چند ضلعیهای نامنتظم مورد بحث زوایای هم شماره همنهشت هستند و اضلاعی که تعداد علامتهای واقع بر آنها یکی است نیز، همنهشت می‌باشند. محورهای تقارن خط چین شده‌اند.

جدول ۱ خلاصه‌ای از نتایجی را که این مثالها حاوی آن هستند، همراه با علامت سؤالهایی که خواننده ممکن است خود، قبل از ادامه دادن بحث، آنها را با اعدادی جایگزین کند، به دست می‌دهد.

جدول ۱

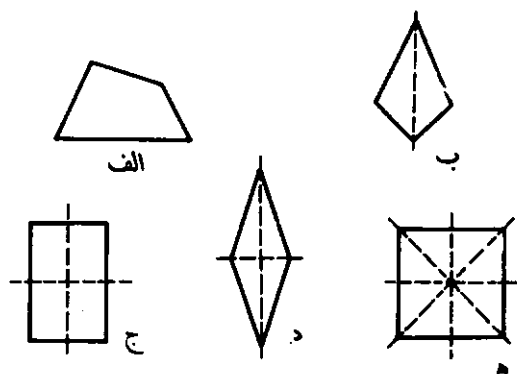
n	$f(n)$
تعداد اضلاع	بیشترین تعداد محورهای تقارن در n ضلعی نامنتظم

دلایلی چند

به عنوان مثال بگذارید نشان بدهیم که $f(9) = 3$. اینکه حداقل (۹) برابر ۳ است از نه ضلعی نامنتظم شکل ۷ الف روشن است. از آنجا که ۹ فرد است، چهارمین محور تقارن باید از یک رأس، مثلاً B ، بگذرد و ضلع مقابل آن را، مثلاً FG ، در زوایای قائمه نصف کند. این نتیجه HB و BC را همنهشت می‌سازد. بنابراین تمام اضلاع همطول خواهند شد، زیرا در شکل ۷ الف داریم: $AB = CD = DE = FG = GH = IA$

آیا ممکن است که یک چهار ضلعی دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد؟ قبل از پاسخ دادن به این سؤال باید دو مطلب درباره خصوصیات محورهای تقارن چندضلعیها را، مدّ نظر داشته باشیم. اگر تعداد اضلاع چند ضلعی فرد باشد، در این صورت محور تقارن باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن را در زوایای قائمه نصف کند. محور تقارن در چند ضلعیهایی با تعداد اضلاع زوج یکی از این دو حالت را خواهد داشت. یا از دو رأس مقابل می‌گذرد و یا دو ضلع مقابل را در زوایای قائمه نصف می‌کند. این هر دو، نتایج تعریف محور تقارن - خطی که انعکاس در آن، چندضلعی را تغییر ناپذیر باقی می‌گذارد - می‌باشند.

بررسی فوق از خصوصیات محور تقارن نشان می‌دهد که یک چهار ضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد. اگر در شکل ۲ ج محور تقارن سومی وجود داشته باشد، لاجرم باید از دو رأس مقابل گذر کند که لازمه این، آن است که جفتیهای از اضلاع مجاور چهار ضلعی که یکدیگر را در آن رئوس تلاقی می‌کند، همنهشت گردند و این، چهار ضلعی را به یک مربع بدل خواهد کرد. خط تقارن سومی در شکل ۲ د، همنهشت شدن زوایای مجاور را ایجاب می‌کند که باز هم چهارضلعی را به یک مربع مبدّل می‌سازد. بنابراین یک چهارضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه خط تقارن داشته باشد.

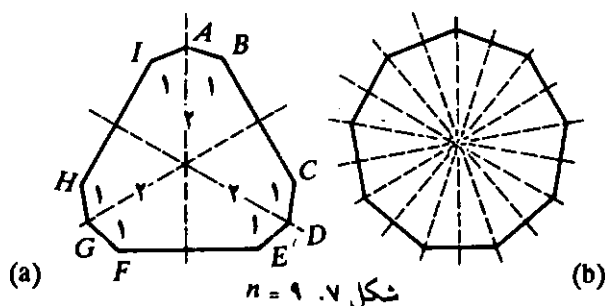


شکل ۲. چهارضلعیهای با صفر (الف)،

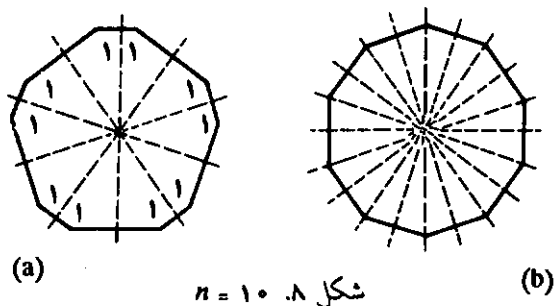
یک (ب)، دو (ج و د) و چهار (ه) محور تقارن

از مثلثهای متساوی الاضلاعی ساخته شده است که با ثابت نگاه داشتن «بیشتر» هر ضلع، هر رأس مثلث مزبور، «اندکی» به مرکز نزدیک آورده شده است. (گرچه برای تطبیق کردن با رئوس انتقال یافته، شکسته شده‌اند). بحثی مشابه با حالت $n = 9$ ، نشان می‌دهد که $f(15) = 5$.

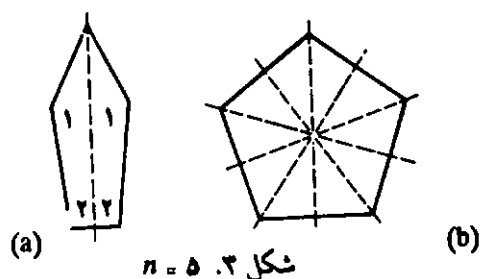
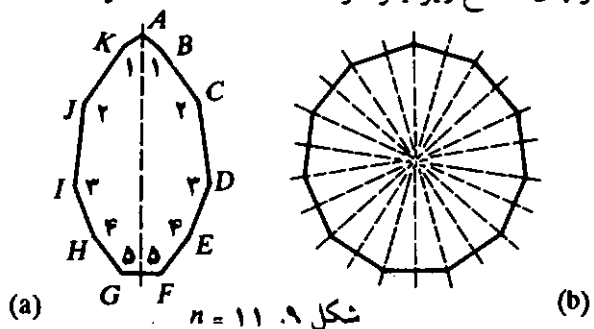
برای نشان دادن این که $f(11) = 1$ فرض می‌کنیم که محور تقارن دومی از رأس دیگری جز A گذشته باشد. رأس I را برای



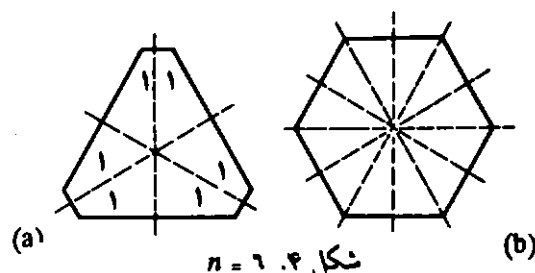
توضیح این موضوع منظور می‌داریم. مباحثی مشابه با این برای انتخابهای دیگر برقرار است. این محور تقارن جدید باید ضلع



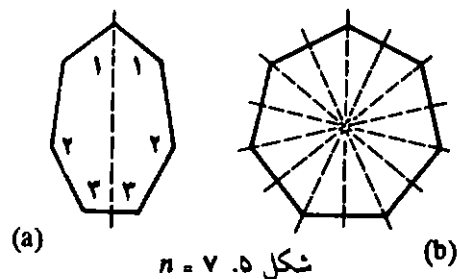
CD را در زوایای قائمه نصف کند و وجود آن مستلزم برابری طولهای اضلاع زیر نیز خواهد شد: $BC = ED$ و $HI = IJ$ و



حال آنکه $BC = EF = HI$. در شکل ۷ الف زوایای A, D و G بایکدیگر همنهشت هستند، در حالی که زوایای همنهشت B ،

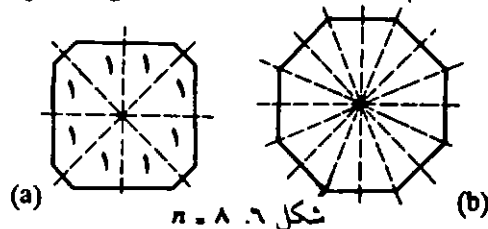


A, H, F, E, C می‌توانند اندازه‌های متفاوت از اندازه A داشته باشند. چهارمین محور تقارن گذرنده از B ، زوایای A و C را همنهشت ساخته و به این ترتیب هر n زاویه را همنهشت



می‌سازد، بنابراین محور چهارم تقارن نه ضلعی را منتظم خواهد ساخت، پس به‌واقع (۹) برابر ۳ است.

پانزده ضلعی نامنتظم با ۵ محور تقارن را می‌توان از یک پنج ضلعی منتظم به‌دست آورد، به همان طریقی که شکل ۷ الف



دهد. پرسشهایی دربارهٔ تقارب محورهای تقارن و زوایای بین محورهای تقارن مناسب این مقطع است.

● فعالیت در سطحی بالاتر می تواند شامل فراخواندن دانش آموزان به یافتن و ساختن تعدادی چند ضلعی باشد، چند ضلعیهایی که تعداد محورهای تقارنشان را خود بچه ها تعیین کنند. برای مثال آیا می توان یک شانزده ضلعی با دو محور تقارن ساخت؟ با سه تا چطور؟ و با چهارتا؟ بهترین نتایج حاصل از اعضای گروه یا کلاس را می توان در جدولی مثل جدول ۱ ثبت کرد.

● کار را در مورد مقادیر بزرگتر n به مسابقه بکشانید. تکلیف دربارهٔ مقادیر بزرگتر n این است که به کمک نقاله چند ضلعی نامنتظمی بایست و یک ضلع رسم کنیم که دقیقاً دارای ۷ محور تقارن باشد.

امید می رود که تحقیقات در این زمینه، هنده را برای دانش آموزان، نیز معلمین دلبذیر تر نماید.

مراجع:

Grossman, Israel, and Wilhelm Magnus. *Groups and their Graphs*.

Washington, D. C. Mathematical Association of America, 1965.

Shilgalis, Thomas W. "A Theorem on Lines of Symmetry." *Mathematics Teacher* 65

(January 1972): 69 - 72



$AB = FE$ و $KA = GF$ و $JK = HG$ تساویهای فوق بر حسب علائم واقع بر آنها به ترتیب به صورت زیر معنا شده اند:

$$III = IIII$$

$$II = IIII$$

$$I = GF$$

$$I = IIII$$

$$II = IIII$$

و بنابراین همه اضلاع همطول هستند. خط تقارن جدید برابری اندازهٔ زوایای زیر نیز دلالت خواهد کرد: ($۲ = ۳$) یا $A = F$ (یا $A = ۵$)، $K = G$ (یا $۱ = ۵$)، $B = E$ (یا $۱ = ۴$)، $C = D$ (یا $۲ = ۴$) $J = H$. نگاهی به فهرست فوق نشان می دهد که چند ضلعی مزبور متساوی الزوایا نیز هست، پس منتظم است بنابراین $f(۱۱) = ۱$.

حالت کلی

بازبینی جدول ۱ با در نظر داشتن مباحث مذکور می تواند تعمیم زیر را مطرح کند:

$$f(n) = \text{بزرگترین مقسوم علیه } n \text{ (بجز خودش)}$$

اثبات اظهار صحیح فوق با استفاده از مسیر استدلال داده شده دربارهٔ ۱۱ و ۹ n تا اندازه ای مشکل است. اثبات حالت کلی آن فراتر از بُرد این مقاله است، اما در صورت تقاضا از طریق نویسنده قابل دستیابی است. پس اجازه دهید در اینجا چند تکلیف کلاسی را مطرح کنیم، زیرا بحثی از این نوع می تواند زمینه های مساعدی را برای تحقیقات دانش آموزان دربر داشته باشد.

تکالیف

● برای شروع، آموزگاران می توانند اشکال ۹ - ۱ را در ابعاد بزرگ تهیه کرده، در اختیار دانش آموزان قرار دهند، تا دانش آموز بتواند با تا کردن آنها، محورهای تقارنشان را نشان