

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

بهترین شکل يك قوطی حلبی

پی. ال. رو (P.L.Roe)

چندی پیش به کتابی برخوردیم که هدفش عام کردن ریاضیات بود؛ و فصل آخرش با حساب دیفرانسیل و انتگرال سروکار داشت. بخش آخر کتاب که آشکارا نقطه اوج کل اثر بود به حل مسأله تعیین ابعاد يك قوطی حلبی به حجم ماکزیمم، از ماده‌ای به مقدار مفروض، پرداخته بود. البته راه حل معروف مسأله مورد بحث این است که ماده به کار رفته متناسب با

$$M = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$

باشد. در این صورت نظر به این که $v = \pi r^2 h$ ، بنا بر این

$$h = \frac{v}{\pi r^2} \quad (2)$$

در ج (۲) در (۱) و قرار دادن $dm/dr = 0$ می‌دهد

$$2\pi r - \frac{2v}{r^2} = 0$$

یا، بنا به (۲)

$$h = 2r$$

به عبارت دیگر، اقتصادی‌ترین شکل ارتفاعی برابر قطر قاعده دارد. سپس نویسندگان کتاب توجه خواننده را به این واقعیت جلب کرده بودند که غالب قوطیها «مربع» نیستند و آن گاه به

جستجوی توضیح اختلاف مزبور پرداخته، و نتیجه گرفته بودند که در دنیای تجارت باید به رسم و رسومات بیش از تفکر منطقی بها داد، و آخرین پیام‌شان به خواننده این اثر را داشت که زیبایی ذهنی خود پاداش خود است.

این روزها، يك چنین نظر گاههای اشراف منشانه‌ای در مورد ریاضیات، تجملی است که تعداد اندکی توان آن را دارند. نکته ظریف در این جاست که مثال اختیار شده فوق، و اختلاف بین مدل ریاضی و دنیای واقعی، عملاً به گونه‌ای نسبتاً دقیق منش راستین و ارزش ریاضیات کار بسته را مطرح می‌کند.

ابتدا در نظر می‌گیریم که چون در و قاعده قوطی مورد بحث از ورقه‌ای بریده شوند، ضایعاتی به وجود می‌آیند، که احتمالاً برای تولید، مجدداً باز پس فرستاده می‌شوند، اما ارزش اندکی برای قوطی ساز دارند. اگر فرض کنیم که ورقه مورد بحث ابتدا به مربعهایی به ضلع $2r$ تقسیم می‌شوند، و بعد از هر مربع دایره‌ای بریده می‌شود، باید به جای معادله (۱)

$$M = 4r^2 + 2\pi rh \quad (3)$$

قرار داد، که به

$$\frac{h}{r} = \frac{4}{\pi} \approx 1.27 \quad (4)$$

منجر می‌شود.

اما تدبیر بهتر (حداقل، از نظر گاه ریاضی) تقسیم صفحه فلزی به شانه عمل ماندنی از شش ضلعیهاست. با چشم پوشی از

و به جای جمله‌های $\left(\frac{1}{r}\right)$ می‌توانیم $(\pi h/v)^{1/2}$ قراردادده
مورد زیر را به دست آوریم

$$2\sqrt{r} - \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\pi h}{v}\right) +$$

$$\frac{2\pi k}{r^{1/2}} \left(\frac{\pi h}{v}\right)^{1/2} - \frac{kv}{\pi r^{3/2}} \left(\frac{\pi h}{v}\right)^{3/2} = 0$$

و سرانجام، از آن

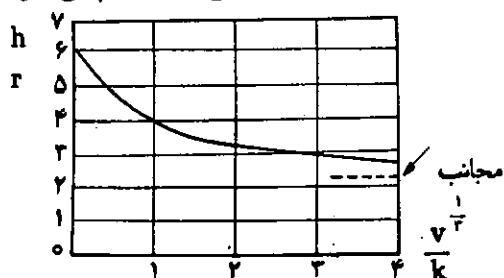
$$\left(2\sqrt{r} - \frac{\pi h}{v}\right) +$$

$$\left(\frac{\pi k^2}{v}\right) \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} \left(2\pi - \frac{h}{r}\right) = 0 \quad (7)$$

معادله اخیر را می‌توان به عنوان معادله‌ای درجه چهارم
بر حسب $(h/r)^{1/2}$ ، با k^2/v به عنوان پارامتر، در نظر گرفت،
اما در این مورد چندین مطلب بلافاصله آشکار می‌شود. ابتدا،
اگر وصل کردن ارزان (k) یا قوطی بزرگ (V) باشد،
در این صورت طرح اولیه $(h/r = 2\sqrt{r}/\pi)$ را داریم.
در حالات مقابلی که در آنها وصل کردن گران، یا قوطی کوچک
است، $h/r = 2\pi$ را به دست می‌آوریم. این رابطه، هزینه‌های
بسیار زیاد مربوط به ماده را با هزینه‌های کارخانه متناظر می‌کند،
نیز، به ازای هر وضعیت دیگری، بنا به قضیه P، مقداری از
 (h/r) بین این دو حد موجود است که در (7) صدق می‌کند.
رسم نمودار رابطه کامل (7)، به سادگی، با تبدیل آن به
صورت

$$\frac{v}{k^2} = \pi \left(\frac{h}{r}\right) \left[\frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 2\sqrt{r}} \right]^2$$

که اجازه طرح این تصویر را می‌دهد، انجام می‌گیرد.



ضایعات واقع در لبه صفحه مورد بحث، درمی‌یابیم که

$$\frac{h}{r} = \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \approx 2.21 \quad (5)$$

گرچه این موضوع ممکن است جالب باشد، نه (4) نه
(5) ابعاد یک قوطی را به خوبی توصیف نمی‌کنند. هنوز بعضی
چیزها را فراموش کرده‌ایم. به عنوان مثال، بررسی یک قوطی حلبی
واقعی نشان می‌دهد که سروه آن از قوسهایی به شعاع تا اندازه‌ای
بزرگتر از r تشکیل شده‌اند، که در این صورت در دو انتهای آن
قالب می‌شوند. تصویب این مطلب به افزایش (h/r) می‌انجامد،
همچنان که هزینه فوق‌العاده‌ای در رابطه با شکل دادن در قوطی،
یا ساختن آن از ماده‌ای ضخیم‌تر چنین می‌کند. مهم و ضروری
است که در مورد هزینه قوطی، علاوه بر قیمت مواد آن، مخارج
ساخت آن در کارخانه را نیز به حساب آوریم. در صورتی که
بر خراج‌ترین، عمل وصل کردن پهلوی و لبه‌های قوطی باشد، هزینه
کل آن، در اقتصادی‌ترین مقطع، متناسب است با

$$c = 2\sqrt{r}r^2 + 2\pi rh + k(2\pi r + h)$$

که در آن k طولی است که می‌تواند به ازای قیمت خرید واحد
سطح ماده (با این تعریف که معادله مزبور از لحاظ ابعاد سازگار
است) وصل شود. در این صورت تکرار تدبیرهای پیشین به

$$2\sqrt{r}r - \frac{v}{r^2} + 2\pi k - \frac{kv}{\pi r^2} = 0 \quad (6)$$

به عنوان شرطی که باید توسط طرحی بهینه، البته همراه با (4)،
برآورده شود، می‌انجامد.

استخراج اطلاعات از (6) به ابتکار نیاز دارد. تحلیل
ابعادی وجود رابطه‌ای را بین (h/r) و (v/k^2) مطرح می‌کند،
و در واقع (6) آن را به دست می‌دهد. بعد از تقسیم طرفین (6)
بر r، جمله‌های آن را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

$$2\sqrt{r}r - \frac{v}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^2 +$$

$$\frac{2\pi k}{r^{1/2}} \left(\frac{1}{r}\right)^{1/2} - \frac{kv}{\pi r^{3/2}} \left(\frac{1}{r}\right)^{3/2} = 0$$

مدلهای کامتری که در حوزه ریاضیات دبیرستانی قرار دارند، شروع به آشکار کردن نتایج واقعی می کنند. می توان بدون پیچیده کردن تحلیل به جست و جوی بسیاری از سؤالات دیگر پرداخت. مثلاً، آیا در صورتی که ورقه های فلزی، تنها در اندازه های استاندارد در دسترس باشند، در استدلال فوق تأثیر می کنند؟ یا اگر بدانیم که ماشینهای قوطی سازی عملاً چگونه کار می کنند؟ آیا طرحمان در مورد حجم مفروضی است؟ یا وزن مفروضی از محتویات قوطی؟ چگونه قوطیها برای حمل و نقل بسته بندی می شوند؟ اندکی منفک شدن از ابعاد بهینه چقدر هزینه برمی دارد؟ آیا این هزینه با ذخیره دیگری جبران می شود؟

به این ترتیب مجال فراوانی برای گسترش درکی راستین از چگونگی سهم ریاضیات در تکنولوژی موجود می شود.

خط سیر پیشگویی شده مزبور را، که قوطیهای بزرگ باید تقریباً مربع باشند، در حالی که قوطیهای کوچک باید بلند و باریک باشند، می توان در سوپر مارکتی تحقیق کرد. به عنوان مثال، قوطیهای مارمالاد پرتقالی را با قوطیهای روغن زیتون مقایسه کنید. با این همه قوطیهای موجودند که با خط سیر مزبور جور در نمی آیند. گاهی توضیحی مستخرج از طبیعت محصول موجود است (فی المثل، حلقه های آناناس). قوطیهای بسیار کوچک غالباً از آن چه انتظار می رود، شاید برای راحت به کار بردن در باز کن، کوتاه و عریض ترند. راحت بودن نیز می تواند در مورد قوطیهای که از آنها می نوشند رعایت شود.

به طور خلاصه، شکست مدل اولیه در پیشگویی شکل واقعی یک قوطی حلبی، از مدلی بسیار ساده بودن آن ناشی می شود.



فهرست اندیشه

خانم B، قطار به مقصد خانه اش را در ساعت ۴ سوار می شود و در ساعت ۶ به ایستگاه مقصد می رسد. همه روزه، شوهرش که با سرعتی ثابت رانندگی می کند، او را در ایستگاه مورد بحث ملاقات می کند. یک روز B، قطار را یک ساعت زودتر می گیرد و در ساعت ۵ وارد می شود. شوهرش برای ملاقات با او منزل را در ساعت همیشگی ترک می کند. بنابراین B پیاده به سمت خانه حرکت می کند. شوهر B او را در راه می بیند و آنها ۲ دقیقه زودتر از وقت معمول به خانه می رسند. B چند دقیقه پیاده حرکت کرده است؟

جواب در صفحه ۹۶