

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

جمعاً گویا، محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی دارند، اما تنها پنج مثلث با اضلاع به طولهای جمعاً عدد طبیعی چنین اند، و از اینها، چنان که قبلاً داده شده، دو مثلث قائم الزاویه اند. شاهین^۵ (۱۹۸۶) ملاحظه کرد که مربع ۴×۴ محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی ۱۶ دارد و بعد اشیای سه بعدی ای را رسم کرد که دارای مجموع بالها، مساحت سطح، و حجم جمعاً از لحاظ عددی مساوی، بودند. با بازگشت به صفحه و تعمیم مربع به مستطیل (مثلاً به ابعاد $m \times n$)، درمی یابیم که $۲m + ۲n = mn$ ، شرط محیط و مساحت از لحاظ عددی مساوی، را می توان به صورت

$$mn - 2m = 2n$$

که به

$$m = \frac{2n}{n-2}$$

تحويل می شود نوشت. در این مورد می توانیم، به ازای هر عدد حقیقی بزرگتر از ۲، دقیقاً یک زوج مناسب (m, n) به دست آوریم. بنا به تقارن، هر عدد حقیقی m بزرگتر از ۲ نیز به عنوان بُعدی از مستطیل منحصر به فردی دارای محیط و مساحت از لحاظ عددی برابر، رخ می دهد.

مسئله در صورتی که بخواهیم m و n ، هر دو، اعدادی صحیح و مثبت باشند، جالبتر می شود. اما این پدیده چه وقت رخ می دهد؟

نمایش وابستگیهای بین جبر و هندسه^۱

از: Mathematics Teacher

دیوید. ار. لینگ و
آرتور. تی. وایت^۲

عبارت $2n/(n-2)$ حداقل در دو زمینه بسیار متفاوت ارتباط دهنده جبر و هندسه رخ می دهد. عبارت مزبور در یکی از این زمینه ها در صورتی که عددی صحیح باشد جالبتر می شود، و در دیگری باید عددی صحیح باشد.

کدام مستطیلها مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی دارند؟

بیتز^۳ (۱۹۷۹) مثلثهای دارای مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی را مشخص کرد. فی المثل، مثلث قائم الزاویه با اضلاع ۶، ۸، و ۱۰ مساحت و محیطی، هر دو، مساوی ۲۴ واحد دارد. مثال دوم، مثلث قائم الزاویه دارای اضلاع به طولهای ۵، ۱۲، و ۱۳ است. مارکویتس^۴ (۱۹۸۱) نشان داد که بی نهایت مثلث با اضلاع به طولهای

1. Exhibiting Connections between Algebra and Geometry

2. David R. Laing and Arthur T. White

3. Bates

4. Markowitz

5. Shahin

بعد باید جمع مقادیر متفاوت از ۳، ۴ و ۶ عدد n را کنار بگذاریم. یکی از اثباتهای این موضوع به آسانی، با دانستن این که هر زاویه p_n به اندازه

$$\theta(n) = \left(\frac{n-2}{n} \right) 180^\circ$$

است، انجام می‌گیرد. این حقیقت با افزودن $(n-3)$ قطر از رأس ثابتی از p_n ، برای تقسیم p_n به $(n-2)$ مثلث، اثبات می‌شود؛ در این صورت

$$n\theta(n) = (n-2) 180^\circ$$

در هر رأس یک صفحه‌بندی، باید تعداد درستی از p_n های یکسان بدون فاصله داشتن یا برخورد کردن، پهلوی هم قرار گیرند؛ به این ترتیب باید $\theta(n)$ عدد 360° را به طور صحیح، مثلاً، m بار، بشمرد. به عبارت دیگر، $\theta(n) = \frac{360}{m}$ ، بنابراین

$$n \left(\frac{360}{m} \right) = (n-2) 180^\circ$$

و در این صورت می‌خواهیم که باز هم

$$m = \frac{2n}{n-2}$$

صحیح باشد.

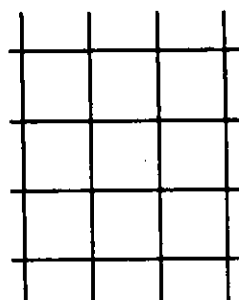
چه وقت $2n(n-2)$ صحیح است؟

با راههای گوناگونی می‌توان به این سؤال پاسخ داد. یکی از این راهها رسم به دقت تابع

$$m = f(n) = \frac{2n}{n-2}$$

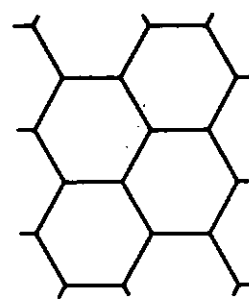
صفحه چه وقت می‌تواند توسط چند ضلعیهای منتظم
همنهشت صفحه‌بندی شود؟

در این مرحله موضوع اصلی بحث‌مان را تغییر می‌دهیم. این واقعیت بسیار معروف است که صفحه‌بندی صفحه با n ضلعیهای منتظم همنهشت p_n ($n \geq 3$ ، عددی صحیح) دقیقاً هنگامی صورت می‌پذیرد که n مساوی ۳، ۴، ۶ یا ۱۲ باشد. عمل صفحه‌بندی با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع، مربعها، و شش ضلعیهای منتظم می‌تواند به سادگی انجام شود: صفحه‌بندیهای با مربع و شش ضلعی منتظم را به ترتیب در شکل‌های ۱a و ۱b مشخص کرده‌ایم. در شکل ۱c نشان داده‌ایم که یک شش ضلعی منتظم می‌تواند به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم شود. اگر این جریان در مورد هر شش ضلعی واقع در شکل ۱b انجام شود، صفحه‌بندی‌ای با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع به دست می‌آوریم.



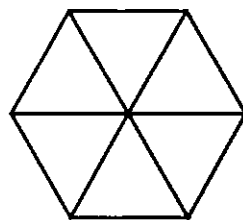
(a)

صفحه‌بندی صفحه با مربع



(b)

صفحه‌بندی صفحه با شش ضلعی



(c)

شش ضلعی منتظم به مثلثهای متساوی‌الاضلاع تقسیم شده است

شکل ۱. سه جزء این شکل سه صفحه‌بندی ممکن صفحه را با چند ضلعیهای منتظم همنهشت مشخص می‌کند.

است، به این ترتیب یک واحد اضافه می‌کند (+۱). هر مربع محیطی دیگر یک واحد سهم در محیط و یک واحد سهم در سطح دارد و به این ترتیب در حال موازنه است (۰). هر مربع داخلی، سهمی در محیط کل ندارد اما همچنان یک واحد در سطح کل سهم است، و بنابراین یک واحد کم می‌کند (-۱). به این ترتیب، اگر لازم باشد که محیط و مساحت مستطیل مورد بحث از لحاظ عددی مساوی باشند، باید تعداد مربعات داخلی برای موازنه با چهار مربع گوشه‌ای دقیقاً برابر چهار باشد. در این صورت نتیجه می‌شود که مستطیل مرکب از مربعات داخلی باید 1×4 ، 2×2 ، یا 4×1 باشد، بنابراین (m, n) باید مساوی $(3, 6)$ ، $(4, 4)$ ، یا $(6, 3)$ باشد. اولین این وضعیت‌ها را در شکل ۳ تصویر کرده‌ایم.

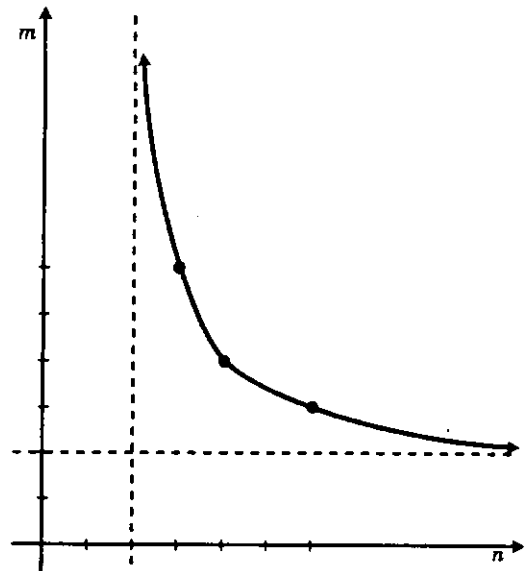
+1	0	0	0	0	+1
0	-1	-1	-1	-1	0
+1	0	0	0	0	+1

شکل ۳. حالت $(m, n) = (3, 6)$

چنان که در شکل ۲ نشان داده است، می‌باشد. با استفاده از این حقیقت که خطوط $m = 2$ و $n = 2$ مجانبهای این تابع اند، برای پیدا کردن این که تنها نقاط با هر دو مختص صحیح واقع بر نمودار مورد بحث، نقاط داده با $(2, 6)$ ، $(3, 4)$ ، و $(4, 3)$ اند، تنها به آزمایش تعداد اندکی نقاط نیاز داریم. راه دیگر با به کار بردن آلوگوریتم تقسیم مربوط به چند جمله‌ایها، و رسیدن به

$$\frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

انجام می‌گیرد، که به این ترتیب $2n(n-2)$ ، دقیقاً هنگامی که $(n-2)$ عدد ۴ را بشمارد، عددی صحیح خواهد بود. سه مقسوم علیه ۱، ۲، و ۴ به ترتیب متناظر با n مساوی ۳، ۴، و ۶ خواهند بود.

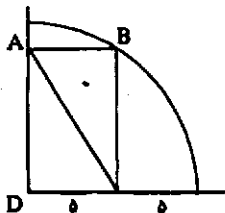


شکل ۲. نمودار $m = 2n/(n-2)$ به ازاء $n > 2$

اندازه قطر را حدس بزنید

از: Mathematical Puzzles and Diversions.:
Martin Gardner

مستطیلی چنانکه در شکل زیر نشان داده شده در ربع دایره‌ای محاط است. آیا می‌توانید با استفاده از اندازه‌های داده شده طول قطر AC را حساب کنید؟
مدت: یک دقیقه!



جواب در صفحه ۹۶

سومین راه حل مان بیش ظریفی در مورد دو سؤال اول مان به دست می‌دهد. فرض می‌کنیم m و n اعداد صحیح و مثبتی باشند، و فرض می‌کنیم مستطیل $(m \times n)$ ی به طریق معمول به mn مربع واحد تقسیم شده باشد. در این صورت هر مربع گوشه‌ای دو واحد محیط در کل محیط، اما تنها یک واحد سطح در کل سطح، سهم