

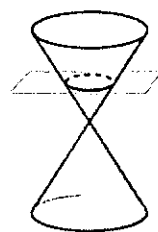
مقاطع مخروطی

ممد رضا امیری

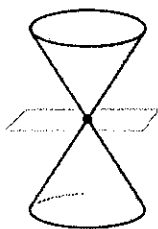
برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

حال اگر یک صفحه در فضا این رویه مخروطی را قطع کند بسته به این که با چه زاویه ای و در چه محلی این برخورد صورت پذیرد شکل های متفاوتی حاصل می شود که به مهمترین آنها خواهیم پرداخت:

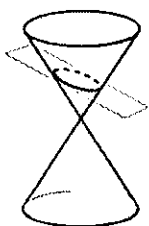
۱- دایره: هرگاه صفحه ای عمود بر محور رویه مخروطی، آن را قطع کند فصل مشترک این صفحه با رویه مخروطی یک دایره است. (مطابق شکل)



۲- هرگاه صفحه ای عمود بر محور رویه مخروطی و در رأس با رویه مخروطی تلاقی کند فصل مشترک حاصل یک نقطه است. (مطابق شکل)



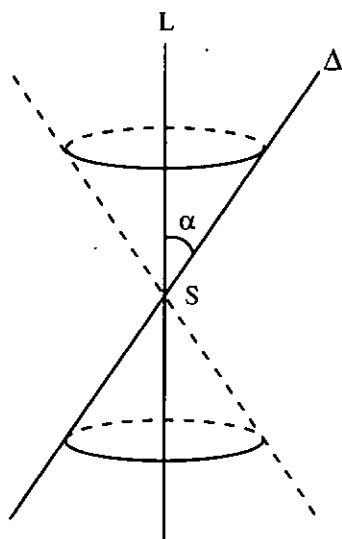
۳- هرگاه صفحه ای غیر عمود بر محور و غیر موازی با مولد در بالا یا پایین رأس، رویه مخروطی را قطع کند شکل حاصل بیضی است. (مطابق شکل)



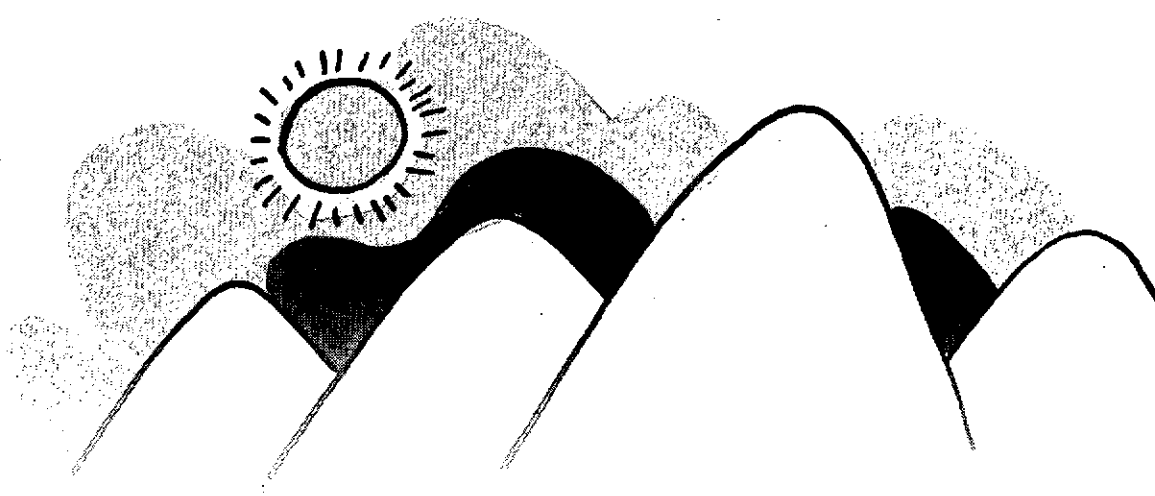
تقریباً از زمان آپولونیوس (ریاضی دان بزرگ یونانی) به بعد شکل کلاسیک ۴ نوع منحنی مسطح به نام های دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که ویژگی های بسیار مهم و کاربردی دارند، مورد توجه قرار گرفتند. در این مقاله به چگونگی ایجاد فرمول و خواص هریک از این ۴ منحنی می پردازیم. هریک از منحنی های مذکور از تقاطع یک صفحه با یک سطح یا رویه مخروطی حاصل می شوند.

تعریف رویه مخروطی

اگر مطابق شکل دو خط L و Δ در نقطه S متقاطع و با هم زاویه $(\alpha \neq 90^\circ)$ داشته باشند و خط L را ثابت فرض کرده و خط Δ را در فضا حول



خط L دوران دهیم، سطح یا رویه حاصل از این دوران به رویه مخروطی دوار یا به اختصار رویه مخروطی معروف است. خط Δ را مولد، خط L را محور رویه مخروطی و نقطه S (محل تقاطع دو خط) را رأس رویه مخروطی می نامیم.



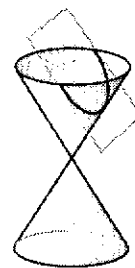
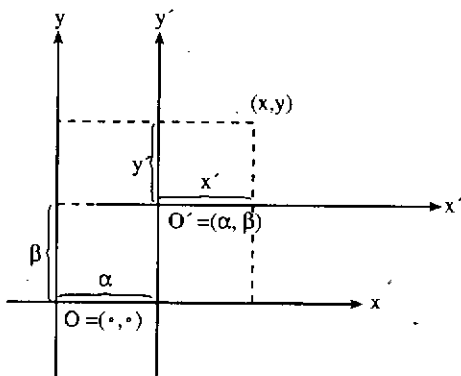
۱- دایره

تعریف. دایره مکان هندسی همه نقاطی از یک صفحه است که فاصله هریک از آن نقاط از یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقدار ثابتی است. به فاصله نقاط تا مرکز دایره، مقدار ثابت شعاع دایره گفته می شود.

در این قسمت، قبل از آن که بخواهیم معادله دایره را معرفی کنیم لازم است تا بحث را به انتقال محورهای مختصات را یادآوری کنیم تا بتوانیم معادله هریک از مقاطع مخروطی را در حالت کلی بنویسیم.

انتقال محورهای مختصات: اگر مبدأ مختصات یعنی $O = (0,0)$ را به نقطه $O' = (\alpha, \beta)$ منتقل کنیم به طوری که محورهای مختصات جدید و قدیم نظیر به نظیر موازی یکدیگر باشند، و نقطه ای دلخواه به مختصات (x, y) در دستگاه قدیم در نظر بگیریم این نقطه در دستگاه جدید (انتقال یافته) دارای مختصات (x', y') است که با توجه به شکل واضح است. رابطه زیر بین مختصات جدید و قدیم برقرار است.

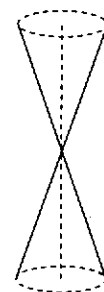
$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$



۴- اگر صفحه ای با مولد رویه مخروطی موازی باشد فصل مشترک حاصل یک سهمی است. (مطابق شکل) (در حالت خاص که صفحه بر رویه مماس است شکل حاصل یک خط است.)



۵- هرگاه صفحه ای به موازات محور، رویه مخروطی را قطع کند و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل، از دو منحنی تشکیل یافته که هذلولی نامیده می شود. (مطابق شکل)



۶- اگر صفحه ای به موازات محور، هر دو قسمت بالا و پایین رأس را قطع کرده و از رأس رویه مخروطی نیز عبور کند (شامل محور و رأس باشد)، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است. (مطابق شکل)

حال به بررسی خواص و ویژگی های این مقاطع مخروطی پرداخته و با توجه به تعریف هندسی هریک فرمولهائی برای هر کدام به دست آورده و مسائلی را طرح و حل می کنیم.

مثال: اگر در دستگاه مختصات دکارتی معادله خط L به صورت $2x - y = 3$ باشد و مبدأ مختصات را از نقطه $O = (0, 0)$ به نقطه $O' = (-1, 2)$ منتقل کنیم معادله جدید خط یعنی L' را در دستگاه جدید بیابید.

اگر $P = (x, y)$ یک نقطه دلخواه از خط L باشد پس از انتقال محورها، مختصات این نقطه یعنی P' به صورت

$$\begin{cases} x' = x - (-1) \\ y' = y - 2 \end{cases} \text{ می باشد، پس } \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases} \text{ که بنا}$$

قرار دادن x و y بر حسب x' و y' در معادله خط خواهیم داشت:

$$2x - y = 3 \Rightarrow 2(x' - 1) - (y' + 2) = 3 \Rightarrow 2x' - y' = 7$$

همان طور که مشاهده کردید دو خط با هم موازی هستند یعنی در انتقال محورها به صورت موازی، زاویه تغییر نمی کند.

حال به بحث اصلی خودمان یعنی معادله مقاطع مخروطی برمی گردیم:

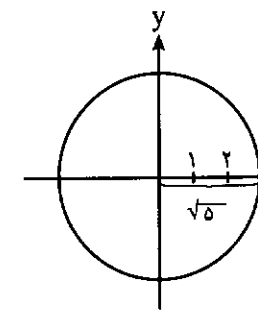
معادله دایره: می خواهیم معادله دایره ای را بیابیم که مرکز آن مبدأ مختصات $O = (0, 0)$ و اندازه شعاع آن r باشد.

واضح است که نقطه $P = (x, y)$ روی دایره مذکور است اگر و فقط فاصله P تا O برابر با r باشد پس:

$$|OP| = r \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

پس معادله دایره ای به مرکز مبدأ مختصات $O = (0, 0)$ و به شعاع r به شکل زیر است:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



مثال: دایره به معادله

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ را رسم کنید.}$$

حال اگر بخواهیم معادله

دایره ای به شعاع r و به مرکز

(α, β) را بنویسیم کافی است

مبدأ مختصات را به نقطه

(α, β) انتقال دهیم که در این صورت اگر $P = (x', y')$ نقطه

دلخواهی از دایره مزبور باشد معادله آن به صورت $x'^2 + y'^2 = r^2$ می باشد که با توجه به انتقال محورها

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases} \text{ پس معادله دایره ای به شعاع } r \text{ و به مرکز } (\alpha, \beta)$$

به شکل روبرو است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

مسئله مهم: اگر $O = (\alpha, \beta)$ مرکز دایره ای به شعاع r باشد

با استفاده از مطالب فصل بردارها معادله این دایره را بیابید.

حل: فرض کنیم $O = (\alpha, \beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن

باشد. شرط لازم و کافی برای آن که نقطه $M = (x, y)$ روی

دایره باشد (با توجه به تعریف دایره) آن است که $|\vec{OM}| = r$

پس خواهیم داشت:

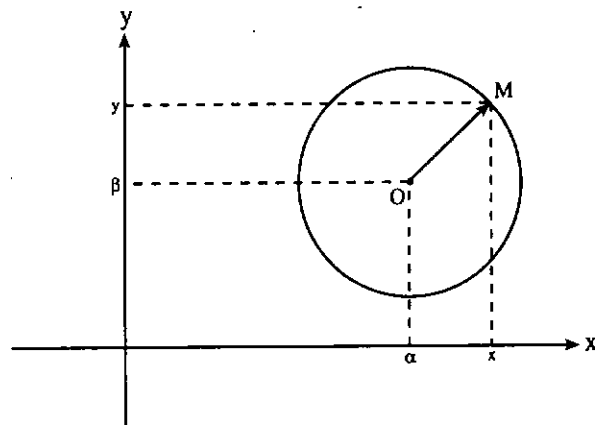
$$|\vec{OM}| = r \Rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Rightarrow$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (\text{معادله دایره})$$

در حالت خاص اگر $O = (0, 0)$ آنگاه:

$$|\vec{OM}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

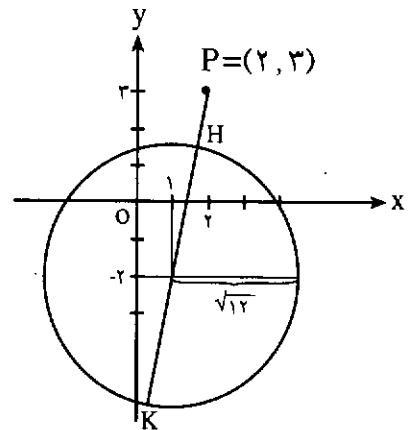
(معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات)



مسائل حل شده و نکات مهم

مسئله ۱: دایره به معادله $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

مفروض است. نقطه $P = (2, 3)$ در داخل دایره قرار دارد یا در خارج آن؟



مرکز دایره $(1, -2)$ بوده و شعاع آن $\sqrt{12}$ می باشد. همان طور که مشاهده می کنید نقطه در خارج دایره واقع است حال اگر مختصات نقطه را در معادله دایره قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(2-1)^2 + (3+2)^2 = 26 > 12$$

تذکر: با توجه به شکل واضح است که برای یافتن کمترین و بیشترین فاصله P از دایره کافی است از P به مرکز دایره وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در دو نقطه H و K قطع کند. طول PH و PK به ترتیب کمترین و بیشترین فاصله P از دایره است. برای مشخص کردن مختصات نقاط H و K معادله خط شامل O و P را با معادله دایره قطع می دهیم. روش دوم برای یافتن اندازه های PH و PK که فرض کنیم $|OP| = d$ در این صورت:

$$|PH| = |OP| - |OH| = |d - r|$$

$$|PK| = |OP| + |OK| = d + r$$

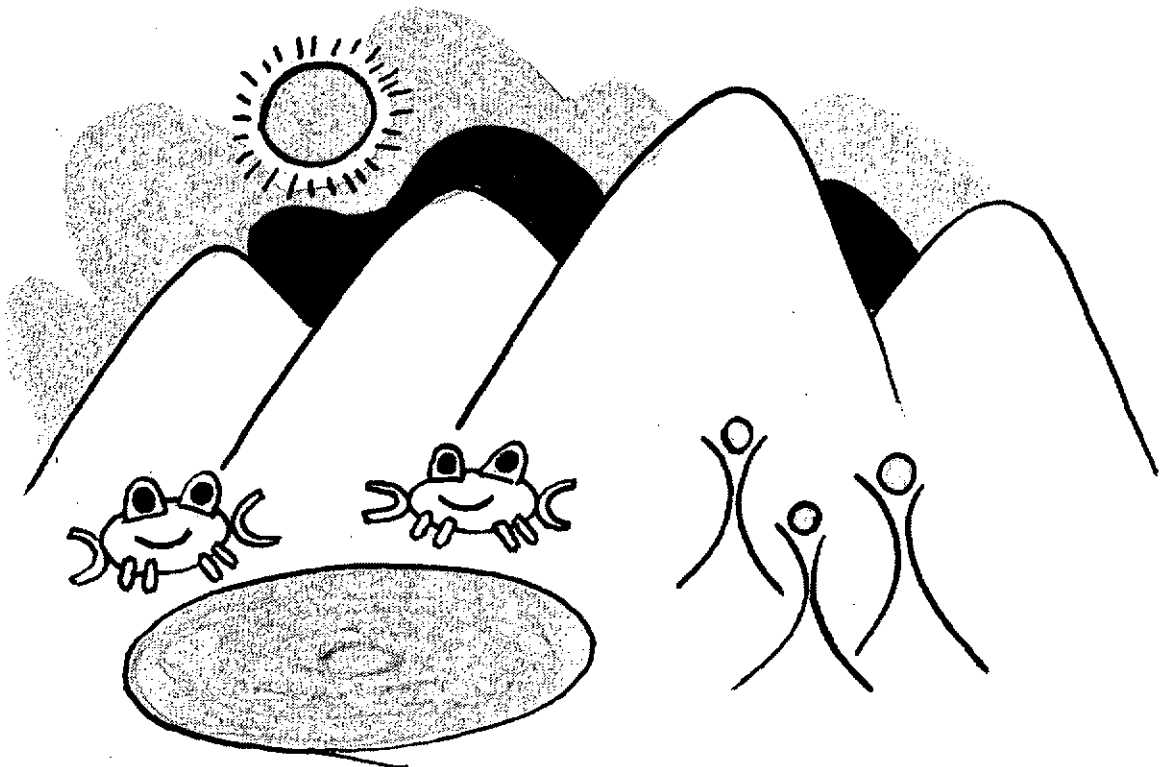
مسئله ۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P = (x, y)$

را بیابید که فاصله آنها از نقطه $H = (2, -1)$ برابر فاصله آنها از نقطه $K = (6, -3)$ باشد.

$$|HP| = \sqrt{3}|KP|$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{3}\sqrt{(x-6)^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3[(x-6)^2 + (y+3)^2]$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \\ &3x^2 - 36x + 108 + 3y^2 + 18y + 27 \\ &\Rightarrow 2x^2 - 32x + 2y^2 + 16y + 130 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 16x + y^2 + 8y + 65 = 0 \\ &\Rightarrow (x-8)^2 - 64 + (y+4)^2 - 16 + 65 = 0 \Rightarrow \\ &(x-8)^2 + (y+4)^2 = 15 \end{aligned}$$

پس مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{15}$ و به مرکز $(8, -4)$.

نکته مهم: هرگاه بخواهیم عبارت $x^2 \pm mx$ را به عبارتی شامل یک عبارت مربع کامل تبدیل کنیم کافی است $\frac{m^2}{4}$ به آن اضافه و کم کنیم.

$$\begin{aligned} x^2 \pm mx &= x^2 \pm mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} = \left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} \\ x^2 + 8x &= (x+4)^2 - \frac{64}{4} = (x+4)^2 - 16 \\ x^2 - 5x &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

مسئله ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $P = (5, 2)$ و از نقطه $A = (2, -2)$ عبور کند.
برای حل این مسئله کافی است اندازه شعاع دایره را به دست آوریم که همان فاصله نقطه A تا مرکز یعنی P است.

$$\begin{aligned} r &= |AP| = \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{25} = 5 \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

مسئله ۴: معادله خطی را بنویسید که در نقطه $A = (3, -3)$ بر دایره به معادله $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ مماس باشد.

حل: می‌دانیم شعاع وارد بر نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین ابتدا ضریب زاویه شعاع وارد بر نقطه A را به دست می‌آوریم که اگر مرکز دایره را C بنامیم خواهیم داشت، $C = (1, -3)$

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-3 - (-3)}{3 - 1} = \frac{0}{2} = 0$$

پس شعاع وارد بر نقطه A موازی با محور x ها بوده و در نتیجه خط مماس بر محور x ها عمود است و چون باید از نقطه $A = (3, -3)$ عبور کند معادله آن به صورت $x = 3$ می‌باشد.

(توجه دارید که اگر شیب شعاع AC برابر $k \neq 0$ باشد و ضریب زاویه خط مماس را m' بنامیم می‌بایست $m' \times m_{AC} = -1$ که در این صورت $m' = \frac{-1}{k}$ بوده و با داشتن مختصات نقطه A از دایره معادله خط مماس نوشته می‌شود.)

مسئله ۵: از نقطه $P = (4, 0)$ دو مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 = 4$ رسم کرده‌ایم. اگر نقاط تماس A و B باشند، مختصات A و B و طول وتر AB را بیابید.

حل: مطابق شکل صفحه بعد اگر فرض کنیم $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ در این صورت ضریب زاویه شعاع وارد بر نقطه A برابر است با $m_{OA} = \frac{y_1}{x_1}$ پس ضریب زاویه خط مماس عبارت است از: $m = \frac{-x_1}{y_1}$

پس معادله خط مماس که از P عبور می‌کند برابر است با:
 $(y-0) = \frac{-x_1}{y_1}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-x_1}{y_1}(x-4)$
چون این خط باید از A عبور کند پس مختصات A نیز در آن صدق می‌کند یعنی:

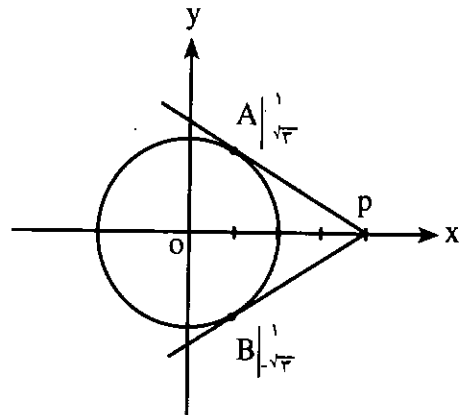
$$y_1 = \frac{-x_1}{y_1}(x_1 - 4) \Rightarrow y_1^2 = -x_1^2 + 4x_1 \quad (1)$$

از طرفی چون A روی دایره قرار دارد پس $x_1^2 + y_1^2 = 4$ لذا معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1^2 + x_1^2 = 4x_1 \Rightarrow 4 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{3}$$

پس مختصات دو نقطه A و B به ترتیب به صورت $(1, \sqrt{3})$ و $(1, -\sqrt{3})$ به دست آمد.

$$|AB| = \sqrt{(1-1)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} \Rightarrow |AB| = 2\sqrt{3}$$



مسئله ۶: معادله دایره ای را بنویسید که $A = (4, -1)$ و $B = (2, 7)$ مختصات دو سر یک قطر این دایره باشد.

حل: چون قطر از مرکز دایره عبور می کند و فاصله مرکز تا دو نقطه A و B برابر است پس مرکز دایره وسط AB قرار دارد بنابراین:

$$C = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+7}{2} \right) \Rightarrow C = (3, 3)$$
 مرکز دایره

$$r = |AC| = \sqrt{(3-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 17$$

مسئله ۷: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $C = (1, -3)$ بوده و بر خط به معادله $2x - y = 1$ مماس باشد.

حل: برای یافتن شعاع دایره کافی است فاصله مرکز دایره تا خط مماس را بیابیم:

$$r = |CH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 1 + (-1) \times (-3) - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-1)^2 + (y+3)^2 = \frac{16}{5}$$

مسئله ۸: معادله دایره ای را بنویسید که دو خط به معادله های $y = 2x - 5$ و $y = -x + 1$ دو قائم بر آن بوده و بر خط $y = x$ مماس باشد.

حل: چون هر خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور می کند پس نقطه تلاقی دو قائم مرکز دایره خواهد بود پس:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow C = (2, -1)$$

و فاصله مرکز تا خط مماس، شعاع دایره است یعنی:

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{2}$$

مسئله ۹: منحنی به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مفروض است. این معادله با چه شرطی معادله یک دایره است؟

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

شرط لازم و کافی برای آن که معادله اخیر معادله دایره باشد آن است که:

$$a^2 + b^2 > 4c \quad \text{یا} \quad \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = r^2 > 0$$

که در این صورت $r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ شعاع و

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$
 مرکز دایره خواهد بود.

نکته مهم: اگر در معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

عدد حقیقی c صفر باشد یا منفی باشد همواره $a^2 + b^2 > 4c$ خواهد بود و معادله یک دایره را مشخص می کند.

مسئله ۱۰: معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $A = (0, 0)$ ، $B = (1, 1)$ و $C = (2, 3)$ عبور کند، سپس مرکز و شعاع دایره را مشخص کنید.



حل: اگر معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم باید مختصات این سه نقطه در معادله فوق صدق کند.

$$A = (0, 0) \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$B = (1, 1) \Rightarrow 1^2 + 1^2 + a + b + 0 = 0 \Rightarrow a + b = -2$$

$$C = (2, 3) \Rightarrow 2^2 + 3^2 + 2a + 3b + 0 = 0 \Rightarrow 2a + 3b = -13$$

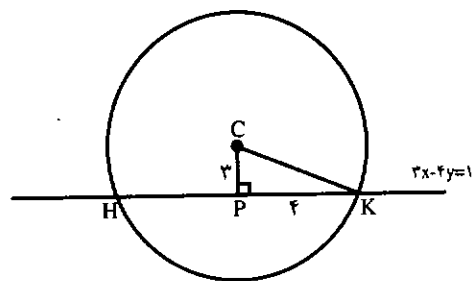
$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + 3b = -13 \end{cases} \Rightarrow b = -9, a = 7$$

$$\text{معادله دایره: } x^2 + y^2 + 7x - 9y = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\text{شعاع دایره: } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 81} = \frac{1}{2} \sqrt{130}$$

مسئله ۱۱: معادله دایره ای را بنویسید که $C = (2, -2)$ مرکز آن بوده و طول وتر حاصل از تقاطع خط به معادله $3x - 4y = -1$ با دایره برابر ۸ باشد.



حل: با توجه به شکل اگر خط، دایره را در دو نقطه H و K قطع کند از نقطه C مرکز دایره عمود CP را بر HK رسم کرده که در این صورت داریم:

$$HK = 8 \Rightarrow PK = 4$$

$$|CP| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overset{CP}{\overset{PK}{\Rightarrow}} |CK|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |CK| = r = 5$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

مسئله ۱۲: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی محور x ها بوده و بر دو خط به معادله های $y = -x$ و $y = -x + 8\sqrt{2}$ مماس باشد.

حل:

$$HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 + 8\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8$$

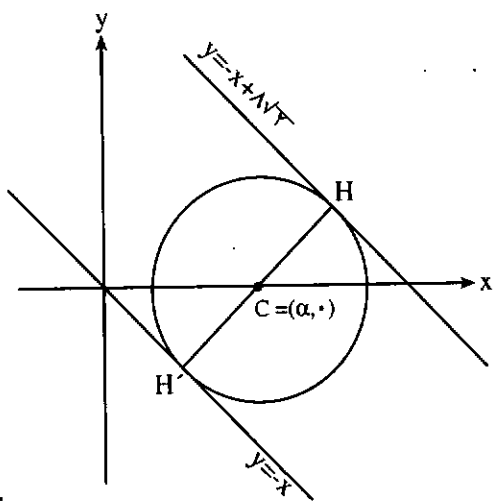
$$2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

مرکز دایره $C = (\alpha, 0)$

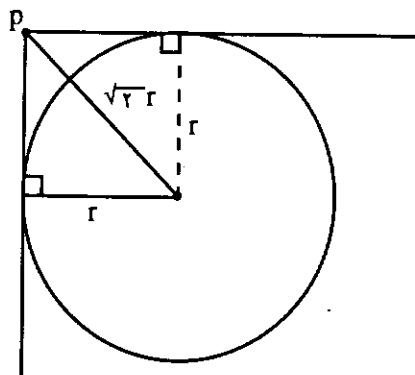
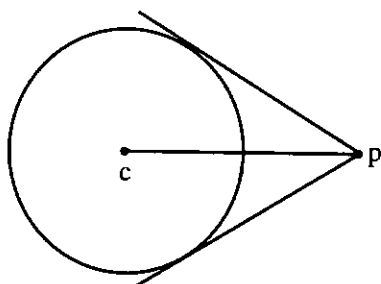
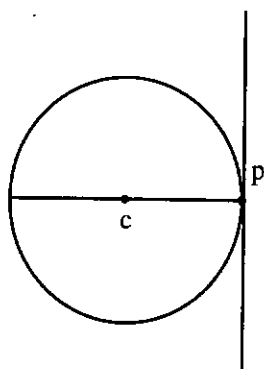
$$|CH'| = 4 \Rightarrow \frac{|1 \times \alpha + (-1) \times 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} = 4$$

$$\Rightarrow |\alpha| = 4\sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 4\sqrt{2})^2 + y^2 = 16$$



نکته مهم: شرط این که از نقطه ای خارج دایره به شعاع r بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد آن است که طول هر مماس برابر شعاع دایره یعنی r و فاصله آن نقطه تا مرکز دایره برابر با $\sqrt{2}r$ باشد. (به شکل توجه کنید) در ضمن مکان هندسی همه نقاطی چون P که می توان از آنها دو مماس عمود بر هم بر دایره ای به شعاع r رسم کرد، دایره ای است هم مرکز با همان دایره و به شعاع $\sqrt{2}r$.



نکته: اگر معادله دایره ای به شکل $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ مفروض باشد و نقطه $A = (x_1, y_1)$ نیز در دست باشد و مختصات A را در معادله دایره قرار دهیم عددی چون k حاصل می شود که در این صورت:

۱- نقطه A روی دایره است اگر $k = r^2$

۲- نقطه A در داخل دایره واقع است اگر $k < r^2$

۳- نقطه A در خارج دایره واقع است اگر $k > r^2$

حال اگر معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مفروض باشد و مختصات A را در معادله (به جای x و y) قرار دهیم عددی چون k به دست می آید که در این صورت داریم:

۱- A روی دایره است اگر $k = 0$

۲- A خارج دایره است اگر $k > 0$

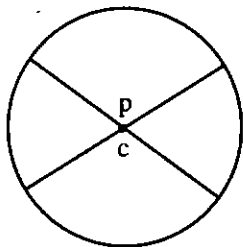
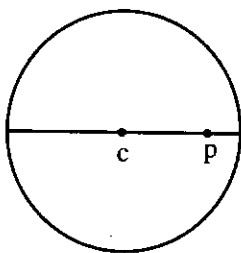
۳- A داخل دایره است اگر $k < 0$

۴- A روی مرکز دایره است اگر $k = -r^2$

نکته مهم: اگر نقطه P دایره به مرکز C و به شعاع r مفروض باشد در این صورت تعداد مماس ها و قائم هایی که از P بر دایره می توان رسم کرد با توجه به مکان P به قرار زیر است: (۱) اگر P خارج دایره باشد، دو مماس و یک قائم می توان بر دایره رسم کرد.

(۲) اگر P روی دایره باشد، یک قائم و یک مماس می توان بر دایره رسم کرد.

(۳) اگر P داخل دایره باشد و روی مرکز نباشد فقط یک قائم می توان بر دایره رسم کرد و مماسی نمی توان رسم کرد.
(۴) اگر P روی مرکز دایره باشد بی شمار قائم می توان بر دایره رسم کرد.



تذکر: توجه دارید که خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور کرده و در حالت (۱) طول دو مماس با هم برابر است.