

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در

هندسه فضایی (قسمت سوم) • پرویز شهریاری

۷. قضیه‌های مربوط به خطهای راست موازی

قضیه ۴. اگر از هریک از دو خط راست موازی مفروض، صفحه‌ای بگذرانیم و، درضمن، این صفحه‌ها متقاطع باشند، آن وقت فصل مشترک این صفحه، با هریک از دو خط راست مفروض، موازی است.

شرط: $\alpha \cap \beta = c, b \subset \beta, a \subset \alpha, a \parallel b$.

حکم: $c \parallel b, c \parallel a$.

اثبات. چون $a \parallel b$ و $c \subset \beta$ ، بنابراین، بنابر معیار موازی بودن خط راست و صفحه β ، $a \parallel \beta$ ، ولی در این صورت، با توجه به قضیه ۳ باید داشته باشیم $c \parallel a$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $c \parallel b$.

قضیه ۵. اگر هریک از دو خط راست مفروض، موازی با خط راست سوم باشد، آن وقت خود این دو خط راست باهم موازیند.

شرط: $b \parallel c, a \parallel c$.

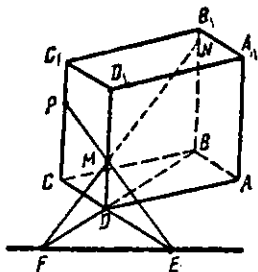
حکم: $a \parallel b$.

اثبات. حالتی را در نظر می‌گیریم که، این سه خط راست، بر یک صفحه نباشند. نقطه دلخواه M را، روی خط راست a، انتخاب می‌کنیم و از M، صفحه α ، و از b و M، صفحه β را می‌گذرانیم (بخش ۳، نتیجه ۱). بنابر قضیه ۴، خط راست MN (فصل مشترک این دو صفحه)، با خط راست b و همچنین، با خط راست c موازی است. از نقطه M نمی‌توان دو خط راست، موازی با خط راست c،

رسم کرد (بخش ۳، مسأله). بنابراین، خط راست MN بر a منطبق است. ولی چون $b \parallel (MN)$ ، پس $a \parallel b$.

مسأله. روی شکل ۶، متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ دیده می‌شود که، هر شش وجه آن، به شکل متوازی الاضلاع اند. نقطه‌های M و N، P به ترتیب، به یالهای DD_1 ، BB_1 و CC_1 تعلق دارند. درضمن $(DC) \parallel (MP)$. فصل مشترک دو صفحه MNP و ABC را پیدا کنید.

حل: برای رسم خط راست مورد نظر، کافی است دو نقطه از فصل مشترک صفحه‌های MNP و ABC را پیدا کنیم. هریک از این گونه نقطه‌ها را، می‌توان، به عنوان نقطه مشترک دو خط راست متقاطع به دست آورد که یکی از آنها متعلق به صفحه MNP و



شکل ۶

دیگری متعلق به صفحه ABC باشد. یکی از این نقطه‌ها، عبارت است از نقطه E، محل برخورد خطهای راست MP و DC که روی

۶۲. اجتماع همه خطهای راست دو به دو موازی را پیدا کنید که، هریک از آنها، خط راست مفروضی را قطع کرده است.

۶۳. متوازی السطوح AC_1 (شکل ۶) مفروض است. ثابت کنید (۱) یالهای AA_1 و CC_1 (۲) یالهای AB و D_1C_1 (۳) یالهای AD و B_1C_1 موازیند و طولی برابر دارند.

۶۴. نقطه M در درون یال B_1C_1 از متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ قرار دارد. مقطع متوازی السطوح را باصفحه‌ای پیدا کنید که (۱) از (DC) و M (۲) از (AD) و M گذشته باشد.

۶۵. مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ مفروض است. می‌دانیم $M \in [AB]$ ، $N \in [AA_1]$ و $P \in [CD]$ (۱). مقطع مکعب مستطیل را باصفحه MNP پیدا کنید؛ (۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB| = 8$ ، $|BC| = 7$ ، $|AA_1| = 6$ و نقطه‌های مفروض در وسط یالهای متناظر باشند.

۶۶. متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ داده شده است. نقطه برخورد خط راست AC_1 را باصفحه‌ای پیدا کنید که از یالهای AB و C_1D_1 می‌گذرد.

۸. وضع دو صفحه نسبت به هم. معیار موازی بودن دو صفحه

دو حالت را، برای وضع دو صفحه نسبت به هم، می‌شناسیم: (۱) وقتی که دو صفحه برهم منطبق باشند و، این وضع، وقتی پیش می‌آید که دو صفحه، سه نقطه مشترک غیرواقع بریک خط راست، داشته باشند (اصل موضوع صفحه)؛ (۲) وقتی که دو صفحه یکدیگر را قطع کرده باشند و، این وضع، وقتی پیش می‌آید که دو صفحه، متمایز و نقطه مشترکی داشته باشند (اصل موضوع برخورد صفحه‌ها).

حالت مومی هم وجود دارد: دو صفحه می‌توانند نقطه مشترکی نداشته باشند. وجود چنین صفحه‌هایی را در بخش ۹ (مسأله) ثابت خواهیم کرد. در این جا هم، دو حالت اول و سوم را، یک حالت به حساب می‌آوریم.

وجه DCC_1D_1 قرار دارند. خطهای راست DD_1 و BB_1 ، که با خط راست AA_1 موازی‌اند، باهم موازی می‌شوند (قضیه ۵). بنابراین، نقطه دوم F را، به عنوان محل برخورد خطهای راست MN و DB پیدا می‌کنیم (این دو خط راست، به صفحه DBB_1 تعلق دارند).

کوتاه شده حل: (۱) $E = (MP) \cap (DC)$ ، (۲) $F = (MN) \cap (DB)$ ، (۳) (EF) . بنابر اصل موضوع برخورد صفحه‌ها، EF همان خط راست مورد نظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

۵۵. متوازی السطوح قائم $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ مفروض است. (۱) ثابت کنید مقطع آن با هر صفحه‌ای که از یک ضلع قاعده بگذرد، متوازی الاضلاع است؛ (۲) محیط مقطع $ABMN$ را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB| = 5$ ، $|BC| = 3$ ، $|CM| = 4$.

۵۶. دوزنقه $ABCD$ ، $(|AB| \parallel |CD|)$ و نقطه M در بیرون صفحه دوزنقه، مفروضند. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که (۱) یکی از M و (CD) و دیگری از M و (AB) گذشته باشد؛ (۲) یکی از M و (AD) و دیگری از M و (BC) بگذرد.

۵۷. قاعده هرم $SABCD$ ، یک متوازی الاضلاع است. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که از دو وجه روبه روی هرم گذشته‌اند.

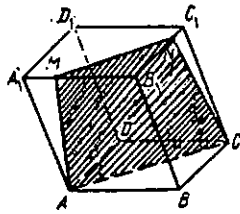
۵۸. می‌دانیم $a \parallel b$ و $a \parallel c$. ثابت کنید $c \parallel b$.

۵۹. متوازی الاضلاعهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ روی دو صفحه مختلفند. ثابت کنید $|A_1A| = |B_1B|$.

۶۰. صفحه α با یکی از دو خط راست موازی باهم، موازی است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، باصفحه α موازی است.

۶۱. می‌دانیم، یکی از دو خط راست موازی، صفحه‌ای را قطع کرده است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، این صفحه را قطع می‌کند.

مسأله. مقطع متوازی السطوح AC_1 را با صفحه α پیدا کنید که از رأسهای A و C و نقطه M در درون یال A_1B_1 گذشته باشد (شکل ۸).



شکل ۸

حل. با رسم پاره‌خطهای راست AC و AM ، فصل مشترک صفحه α ، با دو وجه به دست می‌آید. چون دو وجه $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ موازیند، بنابراین فصل مشترکهای آنها با صفحه α ، باهم موازی می‌شوند. یعنی باید $[MN]$ را موازی $[AC]$ رسم کرد. سرانجام، پاره‌خط راست NC را رسم می‌کنیم. دوزنقه $AMNC$ مقطع مورد نظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

۶۷. نمونه‌هایی از صفحه‌های موازی را، دور و بر خود پیدا کنید.
۶۸. آیا دو صفحه موازیند اگر: (۱) خط راستی واقع بر یکی، با خط راستی واقع بر صفحه دیگر موازی باشد، (۲) دو خط راست واقع بر یک صفحه، با دو خط راست واقع بر صفحه دیگر موازی باشند؟

۶۹. برای متوازی السطوح AC_1 (شکل ۸) روشن کنید: (۱) $(DCC_1) \parallel (ABB_1)$ و $(BCC_1) \parallel (ADD_1)$ ؛ (۲) قاعده منشور قائم دوزنقه است. ثابت کنید، بین وجه‌های جانبی این منشور، تنها دو وجه موازی باهم، وجود دارد.

۷۰. نقطه‌های M ، N و P ، به ترتیب در وسط یالهای DA ، DB و DC از چهار وجهی $ABCD$ واقعند. ثابت کنید، این سه نقطه روی یک خط راست نیستند و $(MNP) \parallel (ABC)$.

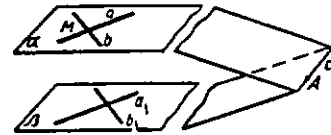
۷۱. خطهای راست a ، b و c که بر یک صفحه نیستند، در نقطه O مشترکند. روی هریک از این خطهای راست و در دو طرف نقطه

تعریف. دو صفحه را موازی گویند وقتی که: یا نقطه مشترکی نداشته باشند و یا برهم منطبق باشند.

موازی بودن دو صفحه α و β را، به صورت $\alpha \parallel \beta$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶ (معیار موازی بودن دو صفحه). اگر دو خط راست متقاطع از صفحه α ، به ترتیب، با دو خط راست واقع بر صفحه β موازی باشند، آن وقت، این صفحه‌ها موازیند.

شرط: $a \parallel a_1, \{a_1, b_1\} \subset \beta, a \cap b = M, \{a, b\} \subset \alpha \Rightarrow a \parallel a_1, b \parallel b_1$
حکم: $\alpha \parallel \beta$



شکل ۷

اثبات: حالتی را در نظر می‌گیریم که α و β ، دو صفحه مختلف باشند (شکل ۷) و از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر دو صفحه در نقطه A مشترک باشند، با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه، باید صفحه‌های α و β در خط راستی مثل c ، مشترک باشند. صفحه‌های α و β ، به ترتیب از خطهای راست a و a_1 ، که باهم موازیند، می‌گذرند. بنابراین، بنابر قضیه ۴ (بخش ۷) $a \parallel c$. همین صفحه‌ها از خطهای راست موازی b و b_1 هم می‌گذرند، یعنی $b \parallel c$. به این ترتیب، از نقطه M واقع بر صفحه α ، دو خط راست مختلف a و b ، موازی خط راست c در می‌آیند که اصل توازی را نقض می‌کند. بنابراین، فرض وجود نقطه مشترک A ، در دو صفحه α و β ، نادرست است و $\alpha \parallel \beta$.

دو صفحه α و β ، اگر با شرط قضیه سازگار باشند، ممکن است برهم منطبق شوند؛ در این حالت هم، بنا به تعریف، دو صفحه موازیند. از تعریف صفحه‌های موازی و خطهای راست موازی نتیجه می‌شود: فصل مشترک دو صفحه موازی با صفحه سوم، دو خط راست موازیند.

موازی با یال AB رسم شده است.

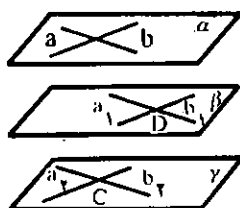
۹. ویژگیهای صفحه‌های موازی

قضیه ۷. اگر دو صفحه، باصفحه سوم موازی باشند، خود باهم

موازیند.

شرط: $\beta \parallel \gamma, \alpha \parallel \gamma$

چکم: $\alpha \parallel \beta$



شکل ۱۰

اثبات. در صفحه α ، دو خط راست متقاطع a و b را رسم می‌کنیم (شکل ۱۰). از هر کدام از این خطهای راست و نقطه دلخواه C از صفحه γ ، صفحه‌ای می‌گذرانیم (این دو صفحه کمکی روی شکل نشان داده نشده است). این صفحه‌ها، صفحه γ را در دو خط راست متقاطع a_1 و b_1 قطع می‌کنند؛ در ضمن $a \parallel a_1$ و $b \parallel b_1$ (بخش ۸ را ببینید). باهمین استدلال، برای دو صفحه α و β ، خطهای راست $a_2 \parallel a_1 \parallel a$ و $b_2 \parallel b_1 \parallel b$ به دست می‌آیند. در این صورت، بنا بر قضیه ۵ (بخش ۷) داریم: $a_1 \parallel a_2$ و $b_1 \parallel b_2$ و از آنجا، $\alpha \parallel \beta$.
مسئله ۱. ثابت کنید، از هر نقطه مفروض، یک صفحه، و تنها یک صفحه می‌توان موازی باصفحه مفروض رسم کرد.

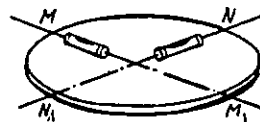


شکل ۱۱

حل. فرض می‌کنیم، نقطه M روی صفحه مفروض α نباشد. دو خط راست متقاطع a و b را، در صفحه α رسم می‌کنیم. از نقطه M ، خط راست $a_1 \parallel a$ و $b_1 \parallel b$ را با توجه به مسئله بخش ۳، در نظر

می‌گیریم. به ترتیب، نقطه‌های A_1 و A_2 ، B_1 و B_2 ، C_1 و C_2 را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، دو صفحه $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ موازی هستند که داشته باشیم: $|OA_1| = |OA_2|$ ، $|OB_1| = |OB_2|$ ، $|OC_1| = |OC_2|$.

۱.۲۲ ثابت کنید، اگر هریک از دو خط راست متقاطع واقع بر یک صفحه، موازی با صفحه‌ای دیگر باشند، آن وقت این دو صفحه باهم موازیند؛ (۲) برای این که افقی بودن یک تیغه را آزمایش کنند، از دو تراز (شبه شکل ۹) استفاده می‌کنند. به چه مناسبت باید ترازها را، روی دو خط راست متقاطع قرار داد؟



شکل ۹

۲.۲۳ اگر داشته باشیم $a \subset \alpha$ ، $b \subset \beta$ و $\alpha \parallel \beta$ ، خطهای راست a و b ، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟

۲.۲۴ ثابت کنید، مجموعه خطهای راستی که از یک نقطه می‌گذرند و با صفحه مفروض موازی باشند، روی یک صفحه واقعند.

۲.۲۵ آیا ممکن است، دو خط راستی که از برخورد دو صفحه با صفحه سوم به دست می‌آیند، با هم موازی باشند؟

۱.۲۶ ثابت کنید، دو پاره خط راست موازی که دو انتهای هریک از آنها روی دو صفحه موازی باشند، طولی برابر دارند؛ (۲) آیا ممکن است، دو پاره خط راست ناموازی که دو انتهای هریک از آنها، روی دو صفحه موازی قرار دارند، طولی برابر داشته باشند؟

۲.۲۷ متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه‌های $M \in [AA_1]$ ، $N \in [CC_1]$ و $P \in [C_1 D_1]$ مفروض‌اند. مقطع متوازی السطوح را با صفحه MNP پیدا کنید.

۲.۲۸ روی یالهای AD و $B_1 C_1$ از متوازی‌السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ، نقطه‌های M و N داده شده‌اند. مطلوب است مقطع متوازی السطوح باصفحه‌ای که از نقطه‌های M و N

۸۰. (۱) ثابت کنید، اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع خواهد کرد؛ (۲) ثابت کنید، هر صفحه، دست کم چهار صفحه شامل وجه‌های یک متوازی السطوح را قطع می‌کند.

۸۱. می‌دانیم $\alpha_1 \parallel \alpha, \beta_1 \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c, \alpha_1 \cap \beta_1 = c_1$. ثابت کنید $c \parallel c_1$.

۸۲. (۱) ثابت کنید، اگر خط راستی، با یکی از دو صفحه موازی، موازی باشد، با دیگری هم موازی است؛ (۲) خط راستی، یکی از دو صفحه موازی را قطع کرده است؛ ثابت کنید، این خط راست، صفحه دوم را هم قطع می‌کند؛ (۳) یک صفحه و خط راستی موازی با آن، داده شده است. صفحه‌ای را پیدا کنید که با صفحه مفروض موازی باشد و از خط راست مفروض بگذرد.

۸۳. مقطع چهار وجهی ABCD را با صفحه‌ای که از نقطه M واقع در درون یال AB، موازی با وجه DBC رسم شده است، پیدا کنید.

۸۴. از رأس چهار وجهی، صفحه‌ای موازی با وجه رو به رو رسم کرده‌ایم. فصل مشترک این صفحه را با صفحه‌هایی که از وجه‌های دیگر چهار وجهی می‌گذرند، پیدا کنید.

۸۵. هرم SABCD (با قاعده ABCD) داده شده است. مقطع آن را با صفحه‌ای که از نقطه $M \in [AB]$ موازی با صفحه SAD رسم شده است، پیدا کنید.

ادامه دارد...

می‌گیریم. از دو خط راست a_1 و b_1 ، صفحه منحصر به فرد β می‌گذرد (بخش ۳، نتیجه ۲). با توجه به معیار موازی بودن دو صفحه: $\beta \parallel \alpha$. ثابت می‌کنیم، β تنها صفحه‌ای است که با شرط مسأله سازگار است.

فرض می‌کنیم، توانسته باشیم، صفحه دیگر γ را (غیر از β)، از نقطه M موازی با صفحه α رسم کنیم (شکل ۱۱). بنابر قضیه ۷، دو صفحه β و γ موازیند، ولی این دو صفحه، بنابر اصل برخورد صفحه‌ها، متقاطعند، یعنی γ نمی‌تواند صفحه‌ای غیر از β باشد.

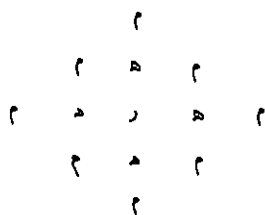
اگر $M \in \alpha$ ، آن وقت، تنها صفحه‌ای که از M می‌گذرد و با α موازی است، خود صفحه α است.

مسأله ۲. ثابت کنید، از هریک از دو خط راست متناظر، می‌توان صفحه‌ای عبور داد، به نحوی که دو صفحه حاصل، با هم موازی باشند.

حل. a و b را دو خط راست متناظر می‌گیریم. از نقطه دلخواه M ، واقع بر خط راست a ، خط راست a_1 را موازی با b رسم می‌کنیم و سپس از a و a_1 ، صفحه α را می‌گذرانیم. به همین ترتیب، نقطه N را بر خط راست b انتخاب و از آن جا خط راست b_1 را موازی با a رسم می‌کنیم و از b و b_1 ، صفحه β را می‌گذرانیم. صفحه‌های α و β با هم موازیند. (چرا؟)

پرسشها و مسأله‌ها

۷۹. دو صفحه متقاطع را در نظر می‌گیریم. آیا می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که با این دو صفحه موازی باشد؟



جواب در صفحه ۹۶

در شکل مقابل به چند طریق کلمه مهر را می‌توان خواند؟

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی