

مفهومهای اصلی و

اصل موضوعها

در هندسه فضایی (۲)

● پرویز شهریاری

۵. خطهای راست متنافر. معیار متنافر بودن خطهای راست

تا این جایی دانیم، دو خط راست می توانند در فضا متقاطع یا متوازی باشند. ولی برای دو خط راست در فضا، ممکن است حالت دیگری هم وجود داشته باشد. برای تصور عینی این گونه خطهای راست، می توان مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ را در نظر گرفت (معمولاً هر اطاقی، به شکل مکعب مستطیل است). در این مکعب مستطیل، خطهای راست AB و $A_1 D_1$ ، نه متقاطع اند و نه متوازی.

تعریف. دو خط راست را متنافر گویند، وقتی که متقاطع یا متوازی نباشند.

دو خط راست متنافر را با نماد $\overset{\circ}{\neq}$ نشان می دهند.

قضیه ۱ (معیار شناسایی دو خط راست متنافر). اگر یکی از دو خط راست بر صفحه ای واقع باشد و خط راست دوم، صفحه را در نقطه ای که روی خط راست اول نیست، قطع کند، آن وقت این دو خط راست متنافرند.

شرط: $a \subset \alpha$ ، $b \cap \alpha = M$ و $M \notin a$.

حکم: $a \overset{\circ}{\neq} b$.

اثبات. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید خطهای راست a و b متقاطع یا متوازی باشند. در این صورت، هر دوی آنها، بر صفحه ای مثل β قرار دارند. صفحه های α و β برهم منطبق اند، زیرا هر دوی آنها، از خط راست a و نقطه M ، که متعلق به a نیست، می گذرند. ولی β ، از خط راست b که متعلق به α نیست، می گذرد یعنی β نمی تواند بر α منطبق باشد. تناقض حاصل، درستی حکم قضیه را ثابت می کند.

به کمک این معیار، اغلب می توان به سادگی و از روی شکل، خطهای راست متنافر را تشخیص داد. مثلاً، در چهار وجهی $ABCD$ (شکل ۱) یالهای AC و BD روی خطهای راست متنافر قرار دارند، زیرا $(AC) \subset (ABC)$ ، در ضمن BC صفحه (ABC) را در نقطه B ، که متعلق به (AC) نیست، قطع می کند، توجه کنید: از دو خط راست متنافر، نمی توان صفحه ای عبور داد.

پرسشها و مسأله ها

۱.۳۴ روی مکعب، چند زوج یال نشان دهید که روی خطهای راست متنافر باشند؟ (۲ روی جسمهایی که در کلاس درس می بینید، نمونه هایی از خطهای راست متناظر را پیدا کنید.

۱.۳۵ هرم $SABCD$ در شکل ۲ را در نظر بگیرید. (۱) ثابت کنید، خط راست SA با خطهای راست BC و CD متنافر است؛ (۲) روی همان شکل، خطهای راستی را نشان دهید که با خط راست AD متنافر باشند.

۱.۳۶ در یک چهاروجهی چند زوج یال وجود دارد که، روی خطهای راست متنافر قرار دارند؟

۱.۳۷ یک خط راست و نقطه ای در بیرون آن مفروض است. ثابت کنید، می توان از این نقطه، خط راستی متنافر با خط راست مفروض رسم کرد؛ (۲) از این نقطه، چند خط راست، متنافر با خط راست مفروض، می توان رسم کرد؟

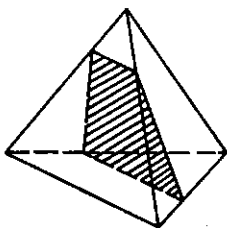
۱.۳۸ دو خط راست متنافر a و b ، نقطه های A_1 و A_2 واقع بر a ، نقطه های B_1 و B_2 واقع بر b ، داده شده اند. ثابت کنید: (۱) خطهای

α در نقطه‌ای مثل M ، مشترک باشند. خطهای راست a و b موازی و متمایزند، بنابراین b نمی‌تواند از M بگذرد. بنابراین، بنابر معیار شناسایی خطهای راست متافر (قضیه ۱)، باید خطهای راست a و b متافر باشند. ولی بنابر شرط $a \parallel b$ تناقض حاصل، به این معناست که فرض ما، مبنی بر این که خط راست a و صفحه α نقطه مشترکی دارند، نادرست است، یعنی $a \cap \alpha = \emptyset$ و $a \parallel \alpha$.
در حالتی که a بر صفحه α منطبق باشد، بنابه تعریف $a \parallel \alpha$.

قضیه ۳. اگر صفحه‌ای از خط راستی موازی با صفحه دیگر بگذرد و صفحه اخیر را قطع کند، آن وقت، فصل مشترک دو صفحه، با خط راست مفروض موازی است.
شرط: $a \parallel \alpha$ ، $a \subset \beta$ ، $\beta \cap \alpha = b$.
حکم: $a \parallel b$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a \not\subset \alpha$. خطهای راست a و b روی صفحه β قرار دارند، در ضمن، a نمی‌تواند b را قطع کند، زیرا در غیر این صورت، a صفحه α را قطع خواهد کرد. پس $a \parallel b$ درستی حکم، برای حالت $a \subset \alpha$ ، روشن است.

مسأله. نقطه‌های M و N ، به ترتیب، درون یالهای AD و AB از چهاروجهی $ABCD$ قرار دارند. مقطع چهاروجهی را با صفحه α پیدا کنید که از این دو نقطه بگذرد و با خط راست AC موازی باشد.



شکل ۵

حل. فرض می‌کنیم، مقطع مجهول را ساخته باشیم. شکل ۵ نشان می‌دهد، مسأله وقتی حل می‌شود که بتوانیم روشی برای پیدا کردن پاره

راست A_1B_1 و A_2B_2 (۲) خطهای راست A_1B_1 و A_2B_2 نسبت به هم متافزند.

۳۹. نقطه‌های A و B روی خط راست m قرار دارند. از نقطه‌های A و B ، عمودهای a و b را بر m رسم کرده‌ایم خطهای راست a و b ، چه وضعی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند؟

۴۰. خطهای راست متافر a و b ، همچنین خطهای راست $a_1 \parallel a$ و $b_1 \parallel b$ داده شده‌اند. خطهای راست a_1 و b_1 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴۱. یک صفحه، یک خط راست و نقطه‌ای در بیرون این خط راست، داده شده‌اند. آیا می‌توان خط راستی پیدا کرد که از نقطه مفروض بگذرد، صفحه مفروض را قطع کند و با خط راست مفروض متافر باشد؟

۶. خط راست موازی با صفحه. معیار شناسایی موازی بودن خط راست با صفحه

در باره موقعیت خط راست، نسبت به صفحه، تا این جا با دو حالت آشنا هستیم: خط راست بر صفحه قرار دارد ($a \subset \alpha$) خط راست صفحه را قطع می‌کند ($a \cap \alpha = A$) حالت سومی هم وجود دارد: خط راست، نقطه مشترکی با صفحه ندارد ($a \cap \alpha = \emptyset$) همان طور که درباره خطهای راست واقع بر صفحه عمل می‌کردیم، در این جا هم، حالت‌های اول و سوم را، یک حالت به حساب می‌آوریم.

تعریف. خط راست و صفحه را موازی می‌نامیم، وقتی که یا نقطه مشترکی نداشته باشند و یا خط راست بر صفحه منطبق باشد. موازی بودن خط راست a و صفحه α را، به صورت $a \parallel \alpha$ یا $a \parallel \alpha$ نشان می‌دهند.

قضیه ۲. (معیار موازی بودن خط راست با صفحه). اگر خط راستی، با یک خط راست واقع بر صفحه موازی باشد، با صفحه موازی است.

شرط: $a \parallel b$ و $b \subset \alpha$

حکم: $a \parallel \alpha$

اثبات. حالتی را در نظر می‌گیریم که $a \not\subset \alpha$. فرض می‌کنیم a و

۴۷. از نقطه مفروض: (۱) چند خط راست موازی با صفحه مفروض؛
 (۲) چند صفحه موازی با خط راست مفروض، می توان رسم کرد؟
 ۴۸. دو خط راست، یکی موازی با صفحه α و دیگری متقاطع با صفحه α داده شده اند. این دو خط راست، نسبت به هم، چه وضعی می توانند داشته باشند؟

۴۹. نقطه های A و B ، به ترتیب روی صفحه های متقاطع α و β قرار دارند، ولی متعلق به خط راست c ، فصل مشترک دو صفحه، نیستند. ثابت کنید، از این دو نقطه، می توان تنها یک صفحه موازی با خط راست c رسم کرد.

۵۰. (۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه ای پیدا کنید که از رأس C و نقطه M واقع در درون یال AB گذشته و با خط راست AD موازی باشد، (۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد و نقطه M ، پاره خط راست AB را نصف کند.

۵۱. M و N را، به ترتیب، نقطه هایی در درون یالهای AD و B از چهاروجهی $ABCD$ می گیریم. مطلوب است مقطع چهاروجهی با صفحه ای که از M و N بگذرد و (۱) با خط راست AB موازی باشد، (۲) با خط راست CD موازی باشد.

۵۲. (۱) مقطع منشور قائم $ABC A_1 B_1 C_1$ را با صفحه ای پیدا کنید که با یال AA_1 موازی باشد و از نقطه های $M \in AB$ و $N \in B_1 C_1$ بگذرد؛ (۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال منشور برابر b باشد و نقطه های M و N یالهای AB و $B_1 C_1$ را نصف کرده باشند.

۵۳. (۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه ای پیدا کنید که از نقطه برخورد میانه های وجه های ABC ، ACD و ABD بگذرد؛ (۲) منشور قائم $ABC A_1 B_1 C_1$ داده شده است. از نقطه M متعلق به وجه ABC و نقطه N متعلق به وجه $B_1 C_1 C$ صفحه ای موازی یال AA_1 رسم کرده ایم. مقطع منشور را با این صفحه پیدا کنید.

۵۴. هرم $SABCD$ (با قاعده $ABCD$) و نقطه M واقع بر یال SD مفروض اند. مقطع هرم را با صفحه ای پیدا کنید که از نقطه های B و M بگذرد و با خط راست AC موازی باشد. ادامه دارد...

خطهای راست NP و MQ پیدا کنیم. این پاره خطهای راست، عبارتند از فصل مشترک صفحه α با وجه های ABC و ADC صفحه ABC از خط راست AC می گذرد که با صفحه α موازی است. در ضمن، این صفحه ها، در نقطه N مشترک اند با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه و قضیه ۳، صفحه های ABC و α در خط راستی موازی (AC) یکدیگر را قطع می کنند، یعنی خط راست NP باید موازی خط راست AC باشد. به همین ترتیب روشن می شود که $(AC) \parallel (MQ)$.

از این جا، روش ساختمان مقطع به دست می آید:

(۱) $(AC) \parallel (NP)$ ، $(P \in BC)$ ، $(AC) \parallel (MQ)$ ،
 $(Q \in DC)$ ، $(MN \parallel PQ)$.
 چهار ضلعی $MNPQ$ ، مقطع مجهول است. در واقع، چون $(AC) \parallel (NP)$ ، پس $(AC) \parallel (MNP)$.

پرسشها و مسأله ها

۴۲. روی جسمهایی که در کلاس می بینید، نمونه هایی از خط راست و صفحه موازی با هم را نشان دهید.

۴۳. مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ را روی صفحه نشان دهید و سپس: (۱) خطهای راست موازی با صفحه ABC و (۲) صفحه های موازی با خط راست $A_1 D_1$ را مشخص کنید.
 ۴۴. خط راستی موازی با یک صفحه داده شده است. (۱) آیا این خط راست، با هر خط راست واقع بر صفحه، موازی است؟ آیا ممکن است، این خط راست، دست کم یکی از خطهای راست واقع بر صفحه را قطع کند؟

۴۵. خط راست a ، با فصل مشترک دو صفحه α و β موازی است. a و α و β ، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟

۴۶. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. نسبت به صفحه ABC چه وضعی دارند: (۱) خط راست MN که از وسط یالهای AD و BD گذشته است؛ (۲) خط راست PQ که دو نقطه آن یالهای BD و CD را (از طرف نقطه D) به نسبت ۲:۱ تقسیم کرده اند؛ (۳) خط راست MQ ؟