

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$0 < 1-x < 0/0001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/0002$$

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/99999, \dots, 9 \dots 9 \dots 9$$

مفهوم حد تابع در یک نقطه

احمد قندهاری

برای دانش آموزان سال سوم

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲ به ۲ نزدیک کنیم، ولی به ۲ نرسد؛ به این شکل:

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/99999, \dots, 9 \dots 9 \dots 9$$

ملاحظه می کنید که هر چه تعداد ۹های سمت راست ممیز را زیاد کنیم؛ عدد حاصل مرتباً به عدد ۲ نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می نویسیم:

$$x \rightarrow 2^+$$

$$x \rightarrow 2^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم؛ به این شکل:

$$x = 3, \dots, 2/7, \dots, 2/3, \dots, 2/1, 2/0.1, 2/0.01, 2/0.001, 2/0.0001, \dots$$

باز هم ملاحظه می کنیم، هر چه تعداد ۰های بین ممیز و عدد ۱ را

زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می نویسیم:

همسایگی

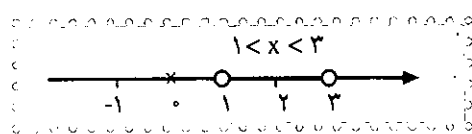
نامساوی $|x-2| < 1$ را در نظر می گیریم و آن را حل می کنیم؛ به

این صورت:

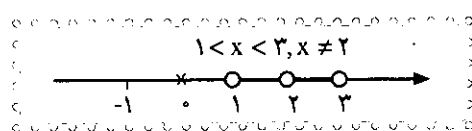
$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

عدد میانی، بازه‌ی (۱ و ۳)، عدد (۲) است. فرض می‌کنیم $x = 2$ ، اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۱ و ۳) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = 2$ به شعاع ۱ گوئیم.

چنان‌چه از بازه‌ی (۱ و ۳)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $\{2\} - (1, 3)$ ، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف شده) عدد ۲ به شعاع ۱ می‌گوئیم



همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

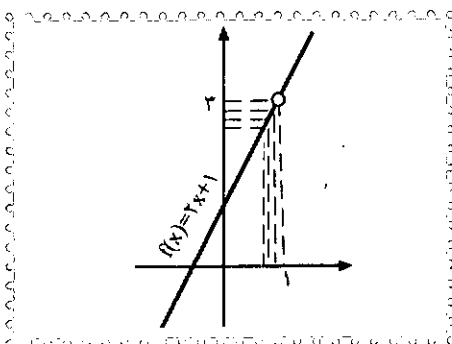
توجه: در حالت کلی، ناسامای $|x - a| < r$ یا $a - r < x < a + r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r می‌گوئیم.

حد چپ

بررسی حد چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)$	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است. از جدول بالا، این نتایج به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} 0 < 1 - x < 0/1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2 \\ 0 < 1 - x < 0/01 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/02 \\ 0 < 1 - x < 0/001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/002 \\ 0 < 1 - x < 0/0001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0002 \\ 0 < 1 - x < 0/00001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/00002 \end{aligned}$$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} 0 < 1 - x < 0/1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/01 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/02 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/002 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/0001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0002 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/00001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/00002 \text{ باید} \end{aligned}$$

می‌توان گفت، $f(x)$ را به حد خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و $x \rightarrow 1^-$ می‌خواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{250}$. تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x) - 3| < \frac{1}{250} \Rightarrow |(2x + 1) - 3| < \frac{1}{250} \Rightarrow |2x - 2| < \frac{1}{250}$$

$$\Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{250} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{500} \Rightarrow 0 < 1 - x < \frac{1}{500}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن قدر نزدیک شود تا فاصله‌اش با آن، کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

پس اگر بخواهیم $f(x)$ به عدد ۳ به حدی نزدیک شود که فاصله‌ی $f(x)$ از عدد ۳ کمتر از $\frac{1}{250}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱

آن قدر نزدیک کنیم تا فاصله‌ی ۱ تا عدد x ، کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{720}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

$$\text{جواب: } 0 < 1 - x < \frac{1}{1440}$$

تعریف حد چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a, x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^-$ ، عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x < x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

تمرین: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 3^-} (4x + 3) = 11$. می‌خواهیم

$$\left| (4x + 3) - 11 \right| < \frac{1}{400}$$

به عدد ۲ نزدیک کنیم.

$$\text{جواب: } 0 < 2 - x < \frac{1}{1600}$$

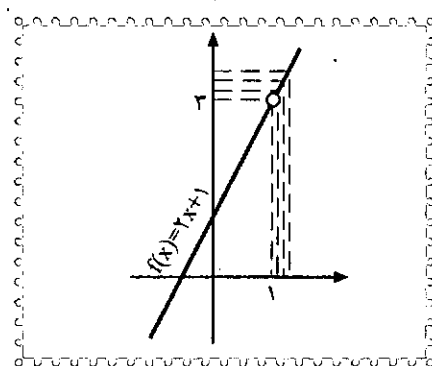
حد راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود: یعنی $x \rightarrow 1^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به همین علت، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
$f(x)$	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x > 1$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع $(f(x))$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است.

از این جدول، نتایج زیر به دست می‌آیند.



$$0 < x - 1 < 0/1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2$$

$$0 < x - 1 < 0/01 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/02$$

$$0 < x - 1 < 0/001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/002$$

$$0 < x - 1 < 0/0001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0002$$

$$0 < x - 1 < 0/00001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/00002$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/2, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/1$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/02, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/01$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/002, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/0002, \text{ باید}$$

$$0 < x - 1 < 0/00001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/00002, \text{ باید}$$

$$0 < x - 1 < 0/000001$$

می‌توان گفت، می‌توانیم $|f(x) - 3|$ را به هر اندازه که

بخواهیم، کوچک کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱

به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم

و $x \rightarrow 1^+$ می‌خواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{750}$. تعیین کنید x را

چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x) - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2(x - 1)| < \frac{1}{750}$$

$$\Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{750} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{1500} \Rightarrow 0 < x - 1 < \frac{1}{1500}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن قدر باید نزدیک

کنیم تا $x - 1$ کمتر از $\frac{1}{1500}$ شود.

تعریف حد راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0, b) تعریف شده باشد.

می‌گوییم حد راست تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^+$ ، عدد حقیقی L

است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم،

به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به

x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

مثال: داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x + 3) = -1$. می‌خواهیم

$$|(-4x + 3) + 1| < \frac{1}{300}$$

آن‌گاه x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه قدر باید به عدد ۱

نزدیک کنیم؟

قضایای حد

۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} b = b \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (\text{ج})$$

۲. فرض می‌کنیم a و b و L اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$. آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} b f(x) = b L_1 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0 \quad (\text{د})$$

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot 0 = 0$$

۴. اگر $f(x) = m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m_n a^n + m_{n-1} a^{n-1} + \dots + m_1 a + m_0$$

۵. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

۶. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $L \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

۷. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ و f و g در a حد داشته باشند، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

۸. حد یک تابع در $x = a$ ، در صورت وجود، یکتاست.
مثال: به کمک قضیه‌های حد، مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 8x}{x^3 + 4x - 1} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$|(-4x+3)+1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4x+2| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)| < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 4|x-1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{1200} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن قدر باید نزدیک کنیم تا $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حد تابع در x_0

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد).

می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $|f(x) - L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم، به شرطی که $|x - x_0|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x - 5$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x \rightarrow 1$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر (-2) است. می‌خواهیم

$$|f(x) + 2| < \frac{1}{100} \quad \text{آن‌گاه } x \text{ را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟}$$

حل:

$$|f(x) + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 5 + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 3| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |3(x-1)| < \frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{300}$$

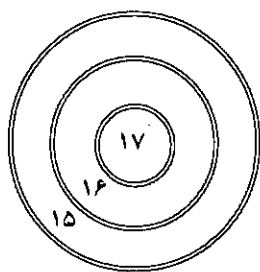
$$\text{یا } 0 < |x-1| < \frac{1}{300}$$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ باشد.

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.



۲. چند مرتبه باید به هدف واقع در شکل زیر تیراندازی کرد و به کدام دایره‌ها اصابت کند، تا به طور دقیق ۱۰۰ امتیاز به دست آید.



(۲-۱) مکتبہ اسلامیہ، لاہور، پاکستان

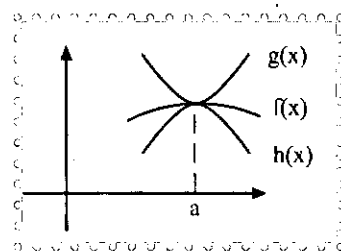
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - \lambda x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 + 7x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 - \lim_{x \rightarrow 1} \lambda x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 + \lim_{x \rightarrow 1} 7x - \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\
 &= \frac{1 - \lambda}{1 + 7 - 1} = \frac{-\lambda}{7}
 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[r]{\frac{x^r - x + r}{rx^r + x + r}} = \sqrt[r]{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^r - x + r)}{\lim_{x \rightarrow 1} (rx^r + x + r)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5}} = \sqrt{\frac{1 - 1 + 5}{2 + 1 + 5}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a ، $f(x)$ بین $g(x)$ و $h(x)$ باشد. هرگاه $g(x)$ و $h(x)$ ، وقتی $x \rightarrow a$ دارای حد $L \in \mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



مثال: اگر $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ، می دانیم $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ (ب)

(فرض $x > 0$)

داریم: $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

آن گاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

چنانچه $x < 0$ باشد، داریم $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$: پس