

مفاهیم حسابان در اسلام و هند

(قسمت اول)

مترجم: غلامرضا یاسی پور

نویسنده: VICTOR J. KAT2
University of Discrit of Columbia
Washington, DS 20008

مقدمه

آیزاک نیوتن، برداشت خود از حسابان را حدود سالهای ۱۶۶۵ تا ۱۶۷۰ میلادی ابداع کرد. یکی از مفاهیم اصلی نیوتن، در انجام این کار، مفهوم سری توانی^۱ بود. وی در این باره اعتقاد داشت که مفهوم مزبور را، با استفاده از شباهت آن با کسره‌های دهمی نامتناهی^۲ حساب، اختراع کرده است [g-Vol. III, P. 33]. البته، نیوتن، از کارهای انجام گرفته در حل مسأله سطح، یکی از مفاهیم اصلی موضوعی که قرار بود حسابان خوانده شود، آگاه بود و به خوبی می‌دانست که سطح زیر خم^۳ $y = x^n$ ، بین $x = 0$ و $x = b$ با $b^{n+1}/(n+1)$ معلوم می‌شود. (این قاعده، در دهه ۱۶۳۰، توسط چند ریاضیدان، از جمله یوناونفورا کاوالیری^۴، ریزلپرسون، روبروال^۵، پی‌یر فرما^۶، مطرح شده بود.) نیوتن، با گسترش سری توانی برای نمایش توابع^۷ گوناگون، توانست از این قاعده اساسی برای یافتن سطحهای زیر خمهای گوناگون بسیاری استفاده کند و بعکس، با استفاده از فرمول سطح^۸، توان گسترش سریهای توانی را یافت. به عنوان مثال، سری توانی $y = \arcsin x$ را، در ارتباط با تعریف آن بر حسب سطح و استفاده از فرمول سطح، مطرح کرد. سپس، سری توانی سینوس را، با حل معادله $y = \arcsin x$ برای $x = \sin y$ با استفاده از عکس سری مورد بحث، به دست آورد.

اما آنچه نیوتن نمی‌دانست، این بود که هم فرمول سطح، که

خیال می‌کرد حدود ۲۵ سال پیش مطرح شده است - و هم سری توانی مربوط به سینوس، صدها سال پیش، در ناحیه‌های دیگری از جهان، کشف شده بود. فرمول سطح مورد بحث، حدود هزار سال پس از میلاد در مصر، و سری توانی سینوس، همچنین کسینوس و آرک تانژانت، احتمالاً در قرن چهاردهم میلادی، در هندوستان مطرح شده بود. در این مقاله، توسعه این دو فرمول را مورد بحث قرار خواهیم داد. اما پیش از بازگشتن، به مصر قرن یازدهم، ابتدا به بخشی می‌پردازیم که فرما و روبروال، به سال ۱۶۳۶، در برداشتشان از فرمول سطح انجام داده‌اند. روبروال، در اکتبر سال مزبور، در نامه‌ای به فرما نوشت که می‌تواند سطح زیر خمهای به صورت $y = x^k$ را، با استفاده از فرمولی بیابد که، تاریخچه آن را در دنیای اسلام بی‌خواهیم گرفت و مربوط به مجموعهای توانهای اعداد طبیعی^۹ است. مجموع عددهای مربع^{۱۰}، همواره بزرگتر از یک سوم مکعبی است که ریشه بزرگترین مربعها را به عنوان ریشه خود داراست و همین مجموع مربعها، با حذف بزرگترین مربع مربوطه، کوچکتر از یک سوم همان مکعب است، نیز مجموع مکعبهای مربوطه، از یک چهارم توان چهارم^{۱۱} بزرگتر، و با حذف بزرگترین مکعب، از یک چهارم توان مزبور کوچکتر است، و غیره [5, P. 221]. به عبارت دیگر، یافتن سطح ناحیه مطلوب، به فرمول زیر وابسته است:

مزبور را بسادگی و با استفاده از این که مقدار n را به قدر کافی بزرگ در نظر بگیریم، از هر مقدار تخصیص یافته، کمتر کرد.

از نابرابری مورد استثنای روبروال، نتیجه می شود که هم سطح A و هم مقدار

$$x_{k+1}/(k+1) = x.y/(k+1)$$

بین دو مقداری فشرده شده اند که تفاضلشان به ۰ نزدیک می شود. به این ترتیب، فرما و روبروال دریافتند که سطح مورد نظر $x.y/(k+1)$ است.

در این مورد، این پرسش واضح مطرح می شود که چگونه این دو دانشمند، به کشف فرمولهایی برای مجموعهای توانها نائل شدند؟ اما در حال حاضر، پاسخی برای این پرسش در دست نیست؛ چه در آثار روبروال، چیزی بیش از نامه ذکر شده وجود ندارد، و تمام چیزی هم که از فرما، در نامه هایش به مارین مرسن^{۱۲} و روبروال، درباره این موضوع در دست داریم، گزاره ای عمومی بر حسب عددهای مثلثی^{۱۳}، عددهای هرمی^{۱۴}، و سایر عددهایی است که به صورت ستونهای مثلث پاسکال^{۱۵} رخ می دهند. (توجه داشته باشیم که کار فرما، در حدود بیست سال پیش از زمانی که پاسکال، مطالب خود را درباره مثلث حسابی^{۱۶} منتشر کرد، انجام گرفته است؛ اما مثلث مزبور، بیش از ششصد سال پیش از آن زمان، به صورتهای بسیاری در چین، خاورمیانه، آفریقای شمالی و اروپا انتشار یافته است^{۱۷}. مرجع زیر را ملاحظه کنید: [4], PP. 191-192; 241-242; 324-325.)

آنچه که فرما در این باره می گوید، چنین است: آخرین ضلع، ضربدر در بزرگتر بعدی، دو برابر مثلث را تشکیل می دهد. آخرین ضلع، ضربدر مثلث ضلع بزرگتر بعدی، سه برابر هرم را تشکیل می دهد. آخرین ضلع، ضربدر هرم بزرگتر بعدی، چهار برابر مثلث در مثلث^{۱۸} را تشکیل می دهد، و همین طور و با همین تفریر تا بی نهایت [5, P. 230].

گزاره فرما را می توان، با استفاده از نماد نویسی^{۱۹} جدید ضرایب دو جمله ای^{۲۰}، به صورت زیر نوشت:

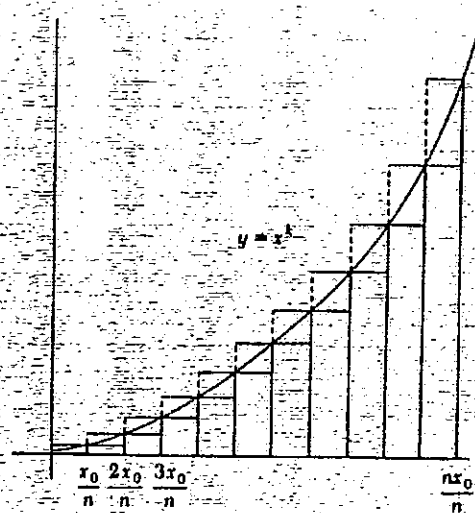
$$n \cdot \binom{n+k}{k} = (k+1) \binom{n+k}{k+1}$$

از این فرمول، می توان به ازای هر نوبت k ، با شروع از $k=1$ ، فرمول صریحی^{۲۱} برای مجموع توان k ام، با استفاده از ویژگیهای مثلث پاسکال، به دست آورد. به عنوان مثال، اگر $k=2$ ، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^n i^k$$

فرما، در پاسخ نوشت که، این مطلب را می دانسته و مانند روبروال، آن را در تعیین سطح زیر نمودار^{۲۲} $y = x^k$ ، روی بازه^{۲۳} $[0, x]$ ، به کار برده است.

هر دو دانشمند، ملاحظه کرده بودند که اگر بازه مینا به n زیر بازه^{۲۴} برابر، هر یک به طول x/n ، تقسیم، و روی هر زیر بازه مستطیلی^{۲۵} که ارتفاع آن، عرض نقطه انتهایی راست آن است، بنا شود (شکل ۱ را ملاحظه کنید)؛ آن گاه مجموع مساحتهای این N مستطیل محیطی^{۲۶}، عبارت است از:



شکل ۱

$$\begin{aligned} & \frac{x^k}{n^k} \frac{x}{n} + \frac{(2x)^k}{n^k} \frac{x}{n} + \dots + \frac{(nx)^k}{n^k} \frac{x}{n} \\ &= \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k) \end{aligned}$$

به همین ترتیب، آن دو توانستند مجموع مساحتهای مستطیلهای محیطی^{۲۸} مربوطه را محاسبه کنند؛ مستطیلهایی که ارتفاع آنها عرض نقطه انتهایی چپ زیر بازه نظیر است. در واقع، اگر A ، سطح زیر خم، بین ۰ و x ، باشد؛ آن گاه

$$\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k) < A < \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

تفاضل^{۲۹} بین عبارتهای^{۳۰} بیرونی این نابرابری^{۳۱}، همان سطح آخرین مستطیل محیطی سمت راست است و فرما با توجه به این که x و $y = x^k$ ثابت هستند، می دانست که می توان تفاضل

کشتن فرمول مربوط به مربعات متساوی، و فرمول مکعبها نیز، تا اندکی پیچیده تر نسبتاً آسان است. در حالی که معکوس، فرمول مربوط به توانهای چهارم واضح نیست، و اگر کسی بتواند روشی برای تعیین این فرمول کشف کند، می تواند روش تعیین فرمول مجموع هر توان درست^{۲۱} را به دست آورد.

در واقع، این هشتم چگونگی طرح فرمول مربوط به توانهای k م، از $k=1$ تا $k=4$ را نشان داد؛ تمام اثباتهای وی، ذاتاً، مشابه کشف و اثبات فرمولهای مربوط به مجموع هر توان مفروض از عدددهای صحیح^{۲۲}، و بسادگی قابل تعمیم به آن است، و احتمالاً این موضوع که وی چنین تعمیمی^{۲۳} را بیان نکرده، از این لحاظ بوده که، برای حل مسئله مورد علاقه خود، یعنی محاسبه حجم سهمی واری^{۲۴} خاص، تنها فرمولهای توانهای دوم و چهارم نیاز داشته است.

پیش از بررسی کار این هشتم، به نیست مختصری از دنیای علم در اسلام، سخن به میان آوریم (برای بررسی مفصل آن را ملاحظه کنید). طی قرن نهم میلادی، مأمون، خلیفه عباسی، برای گسترش شیوه های علمی در دنیای اسلام، پژوهشگاهی^{۲۵}، موسوم به بیت الحکمه^{۲۶}، در بغداد تأسیس، و دانشمندانی از تمام نواحی تحت نفوذ خلیفه، دعوت کرد. دانشمندان مزبور نه تنها مستلمان، که مسیحی، یهود و زرتشتی نیز بودند.

هدف این دانشمندان، در مرحله اول، ترجمه بهترین آثار ریاضی و علمی از یونان و هند به زبان عربی، و در مرحله دوم، ایجاد مفاهیم جدید ریاضی و علمی بر مبنای این آثار بود.

گرچه، بیت الحکمه، در حدود دو قرن بعد از میان رفت، بسیاری از حکومت های مناطق اسلامی، به حمایت خود از دانشمندان در امر پژوهش های علمی ادامه دادند؛ زیرا دریافته بودند که پژوهش های مزبور در کارهای عملی ارزشمندند.

به این ترتیب بود که ابن هشتم، متولد بصره در عراق امروزی، توسط الحکیم خلیفه، برای بررسی پروژه کنترل رود نیل، به مصر دعوت شد، و گرچه پروژه مزبور هیچ گاه به ثمر نرسید؛ اما ابن هشتم، مهمترین اثر خود، *فی المناظر*^{۲۷} را در هفت باب و در مصر به وجود آورد.

فی المناظر در اوایل قرن سیزدهم میلادی به لاتین ترجمه شد و طی چندین قرن بعد، در اروپا، به بررسی و بحث در آن پرداخته شد.

شهرت ابن هشتم، به عنوان ریاضیدان^{۲۸}، از قرون وسطی تا

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^k = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}(n+1)^k + \frac{1}{6}k(n+1)^{k-1} + \dots + \frac{1}{k!}n^k + \frac{1}{(k+1)!}$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{6}kn^{k-1} + \dots + \frac{1}{k!}n + \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

در حالت عمومی، فرمول مجموع^{۲۹} به صورت

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + P(n)$$

است، که در آن، $P(n)$ ، چند جمله ای^{۳۰} بر حسب n ، تا درجه ای^{۳۱} کمتر از k ، است و نابرابری دویروال می تواند به ازای هر k اثبات شود.

در این باره، از این موضوع که استخراج^{۳۲} فرماسبه فوق بوده با خبر، بی خبریم؛ زیرا وی تنها فرمول مجموعی، به ازای $k=4$ ، را به طور صریح بیان کرده و توضیح دیگری از شیوه خود به دست نداده است.

مجموعه های توانهای صحیح^{۳۳} در مصر قرن یازدهم

اما فرمولهای مربوط به مجموعه های توانهای k م، دست کم تا $k=4$ نیز، صورتی از نابرابری دویروال، حدود ۶۵۰ سال پیش از نیمه قرن هفدهم، توسط ابوعلی الحسن بن الحسن بن الهیثم (ابن هشتم) (۹۶۵-۱۰۳۹ میلادی)^{۳۴}، که در اروپا به الهانز^{۳۵} معروف است، مطرح شده است.

فرمولهای مربوط به مجموعه های مربعی و مکعبی، حتی از این تاریخ نیز زودتر بیان شده اند. مورد مربوط به مربعی، توسط ارشمیدس^{۳۶}، حدود ۲۵۰ پیش از میلاد، در رابطه با تعیین مساحت سهمی^{۳۷} بیان شد؛ در حالی که مورد مربوط به مکعبی، گرچه احتمالاً برای یونانیان شناخته شده بوده است، اولین بار به طور صریح، توسط آریابهاتا^{۳۸}، حدود ۵۰۰ میلادی، در هند، مکتوب گردید [2, PP.37-38].

فرمولهایی، برای مجموعهای توانهای درست، استفاده می‌کند و ابتدا، به اثبات فرمولهای مجموع در مورد مربعها و مکعبها می‌پردازد:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right)n(n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4}\right)n(n+1)n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

در این جا به این اثباتها نمی‌پردازیم و تنها به استخراج نتیجه‌ای مشابه^{۶۶} برای توانهای چهارم توجه، و خاطر نشان می‌کنیم که اگر چه خود این هیشم، این نتیجه را تنها به ازای $n=4$ به دست آورده، آن را، به ازای هر n دلخواه، بیان کرده است. بنابراین، برای استخراج فرمول مورد بحث در این حالت، با نمونه‌برداری از روش وی، و با استفاده از شیوه‌های جدید، کارمان را با توجه به فرمولهای مربوط به مجموعهای مربعها و مکعبها، برای نوشتن معادله (*) به صورت زیر، آغاز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(n+1) \sum_{i=1}^n i^3 &= \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{p=1}^n \left(\frac{p^3}{4} + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{4}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2\end{aligned}$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که:

$$(n+1) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{5}{4} \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\frac{5}{4} \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1 - \frac{1}{4}) \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{4}{5} (n+1 - \frac{1}{4}) \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \frac{4}{5} (n+1 - \frac{1}{4}) (\frac{n}{4} + \frac{1}{4}) n(n+1) - \frac{1}{5} (\frac{n}{3} + \frac{1}{3}) n(n+1)$$

$$= (\frac{n}{5} + \frac{1}{5}) (n+1 - \frac{1}{4}) n(n+1) - (\frac{n}{5} + \frac{1}{5}) (n+1) n \cdot \frac{1}{3}$$

این هیشم دستاورد خود را به طور شفاهی، به گونه‌ای بیان می‌کند که در نمادنویسی جدید، به صورت زیر ترجمه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = (\frac{n}{5} + \frac{1}{5}) n(n+1) \left[(n+1) n - \frac{1}{3} \right]$$

حال حاضر، بیشتر به خاطر مسأله الحسن^{۵۱}، او است، که مسأله یافتن نقطه یا نقاطی واقع بر رویه منعکس کننده‌ای است که نوری که از یکی از دو نقطه خارج از رویه به آن (ها) برخورد می‌کند و از دیگری می‌گذرد.

الحسن، در باب پنجم فی المناظر، راه حل‌های خود را برای رویه‌های گوناگونی، از کروی^{۵۲} گرفته تا استوانه‌ای^{۵۳} و مخروطی^{۵۴}، مقعر^{۵۵} و محدب^{۵۶}، مطرح می‌کند. دستاوردهای وی، که مبتنی بر شش لم^{۵۷} جداگانه به اثبات رسیده درباره ترسیمهای هندسی^{۵۸} است، نشان می‌دهد که وی از هر دو بخش هندسه مقدماتی^{۵۹} و پیشرفته^{۶۰} یونانیها آگاهی کامل داشته است.

اندیشه اصلی این هیشم در اثبات فرمولهای مجموع، استخراج معادله زیر بوده است:

$$(n+1) \sum_{i=1}^n i^k = \sum_{i=1}^n i^{k+1} + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^k \right) \quad (*)$$

طبیعی است که وی این نتیجه را در صورت عمومی آن بیان نکرده و تنها به بیان آن در مورد عددهای صحیح خاص، یعنی $n=4$ و $k=1, 2, 3$ پرداخته است؛ اما اثبات وی، به ازای هر یک از این k ها، با استفاده از استقرا^{۶۱} بر n انجام گرفته و بلافاصله، بر هر مقدار k ، تعمیم پذیر^{۶۲} است. (برای تفصیل واقعه [۷] را ملاحظه کنید.) در این جا به بررسی اثبات این هیشم، به ازای $k=3$ و $n=4$ ، می‌پردازیم:

$$(4+1)(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$$

$$= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

$$= 4 \cdot 4^3 + 4(1^3 + 2^3 + 3^3) + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

$$= 4^4 + (3+1)(1^3 + 2^3 + 3^3) + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

به دلیل این که معادله (*), به ازای $n=3$ ، راست در نظر گرفته شده است،

$$(3+1)(1^3 + 2^3 + 3^3)$$

$$= 1^4 + 2^4 + 3^4 + (1^3 + 2^3 + 3^3) + (1^3 + 2^3) + 1^3$$

در این صورت، معادله (*), به ازای $n=4$ ، اثبات می‌شود و به این ترتیب، می‌توان، استدلال^{۶۳} این هیشم را، بر حسب اصطلاحات^{۶۴} جدید، بسادگی تشکیل، و با استفاده از استقرا بر n و به ازای هر مقدار k ، اثباتی به دست داد.

در این مرحله، این هیشم از دستاورد خود برای استخراج

اما از آن جا که این هیشم از فرمولهای مجموعهای مربعهای درست و توانهای چهارم آگاه بود، توانست محاسبه کند که :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n^4 - 2n^2 i^2 + i^4) = \frac{1}{15} (n-1)n^4 + \frac{1}{30} n$$

$$= \frac{1}{15} n \cdot n^4 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{30} n$$

و بنابراین :

$$\frac{1}{15} (n-1)n^4 < \sum_{i=1}^{n-1} (n^4 - 2n^2 i^2 + i^4) < \frac{1}{15} n \cdot n^4$$

اما حجم برشی معمولی^{۸۶} از استوانه محیطی^{۸۷} مربوطه $\pi h^5 n^2 = \pi k^2 h^5 n^2$ است و بنابراین حجم کل استوانه $\pi k^2 h^5 n \cdot n^2$ است. در حالی که حجم استوانه بدون برش بالایی، $\pi k^2 h^5 (n-1)n^2$ است. در این صورت، نابرابری فوق نشان می دهد که حجم سهمی وار مورد بحث بین $\frac{1}{15}$ استوانه بدون برش بالایی و $\frac{1}{15}$ کل استوانه است.

از آن جا که برش بالایی را می توان با بزرگ کردن به قدر کفایت n ، در حد مطلوب کوچک کرد، نتیجه می شود که حجم سهمی وار، چنان که اظهار کردیم، به طور دقیق $\frac{1}{15}$ حجم استوانه است.

فرمول مجموع توانهای چهارم این هیشم، در سایر نواحی دنیای اسلامی و تا چند قرن بعد هم ظاهر شده است. این فرمول در آثار ابوالحسن بن حیدر (در حدود ۱۴۱۳ میلادی)، که در مراکش کنونی می زیسته و آثار ابو عبد الله بن قاضی (۱۴۳۷-۱۵۱۵ میلادی)، که وی نیز ساکن مراکش بوده، آورده شده است. (برای تفصیل بیشتر [۳] را ملاحظه کنید).

گذشته از این، فرمول یاد شده را می توان در مفتاح الحساب^{۸۸} غیاث الدین حمشید کاشانی (حدود ۱۴۹۲ میلادی) نیز یافت؛ ریاضیدان و منجمی که بیشتر دوران نا برکت عمر خویش را در سمرقند - که در حال حاضر در ازبکستان قرار دارد - در دربار الغ بیگ گذرانده است.

اما این نکته، که ریاضیدانان مزبور، چگونه از این فرمول آگاه شده اند یا برای چه هدفی آن را به کار برده اند، نامعلوم است.

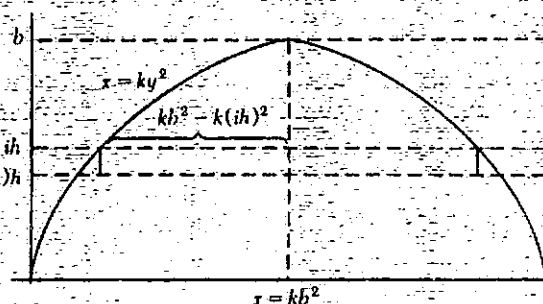
این نتیجه را می توان به صورت یک چند جمله ای نیز نوشت :

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

آشکار است که از این فرمول می توان، مانند استفاده فرما و روبروال از نابرابری روبروال، در اثبات رابطه زیر بهره برد :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

این هیشم از دستاورد خود در مجموعهای توانهای درست، برای انجام دادن کاری استفاده کرد که آن را انتگرال گیری^{۸۹} می نامیم، و بخصوص، دستاورد مزبور را در تعیین حجم^{۹۰} جسم^{۹۱} ساخته شده از دوران سهمی^{۹۲} $x = ky^2$ حول خط $x = kb^2$ ، عمود بر محور سهمی، به کار برد و نشان داد که این حجم، $\frac{1}{15}$ حجم استوانه ای^{۹۳} به شعاع^{۹۴} kb^2 و ارتفاع^{۹۵} b است. (شکل ۲ را ملاحظه کنید).



شکل ۲

استدلال صوری^{۹۶} این هیشم، استدلال افغانی متعارفی^{۹۷} از نوع یونانی بود که از برهان خلفی^{۹۸} دوگانه استفاده می برد؛ اما روش وی در ذات، شامل برش دادن استوانه و سهمی وار به n قرص^{۹۹}، هر یک به ضخامت^{۱۰۰} $h = \frac{b}{n}$ ، و سپس جمع کردن قرصهاست. آئین قرص سهمی وار دارای شعاع^{۱۰۱} $kb^2 - k(ih)^2$ است و بنابراین حجم :

$$\pi h (kb^2 - k(ih)^2) = \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)$$

را داراست. در این صورت، حجم کل^{۱۰۲} سهمی وار مورد بحث، به طور تقریب، برابر است با :

$$\pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2) = \pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1} (n^4 - 2n^2 i^2 + i^4)$$

40. Quadrature of Parabola
41. Aryabhata
42. Integral Power
43. Integer Numbers
44. Generalization
45. Volume
46. Paraboloid
47. Research Institute
48. House of Wisdom
49. Optics
50. Mathematician
51. Alhazen's Problem
52. Spherical
53. Cylindrical
54. Conical
55. Concave
56. Convex
57. Lemma
58. Geometrical Constructions
59. Elementary
60. Advanced
61. Equation
62. Induction
63. Generalizable
64. Argument
65. Terminology
66. Analogous Result
67. Integration
68. Volume
69. Solid
70. Parabola
71. Line
72. Axis
73. Cylinder
74. Radius
75. Height
76. Formal Argument
77. Exhaustion Argument
78. Reductio ad Absurdum
79. Disk
80. Thickness
81. Total volume
82. Typical slice
83. Circumscribing Cylinder
84. The Calculator's Key

1. Calculus
2. Power Series
3. Infinite Decimal Expansions
4. Curve
5. Bonaventura Cavalieri
6. Gilles Persone de Roberval
7. Pierre de Fermat
8. Functions
9. Area Formula
10. Natural Numbers

۱۱. Square Numbers. یعنی اعداد $۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, \dots$ قضیه به

صورت ریاضی چنین است:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + (n-1)^۲ < \frac{1}{3}n^۳ < ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + (n-1)^۲ + n^۲$$

12. Fourth Power
13. Graph
14. Interval
15. Subinterval
16. Rectangle
17. Circumscribed Rectangle
18. Inscribed Rectangles
19. Difference
20. Expressions
21. Inequality
22. Marin Mersenne
23. Triangular Numbers
24. Pyramidal Numbers
25. Pascal's Triangle
26. Arithmetical triangle

۲۷. از ریاضیدانان ایرانی، ابوبکر محمد بن حسین کرجی، ریاضیدان نیمه دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری نیز به این کار پرداخته است.

28. Triangulotriangle
29. Notation
30. Binomial Coefficients
31. Explicit Formula
32. Sum for Mula
33. Polynomial
34. Degree
35. Derivation
36. Sums of Integer Powers

۳۷. مطابق با ۳۵۴ - ۴۲۰ هجری، برای شرح حال این ریاضیدان مسلمان، به زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی، ابوالقاسم قربانی رجوع کنید.

38. Alhazen
39. Archimedes