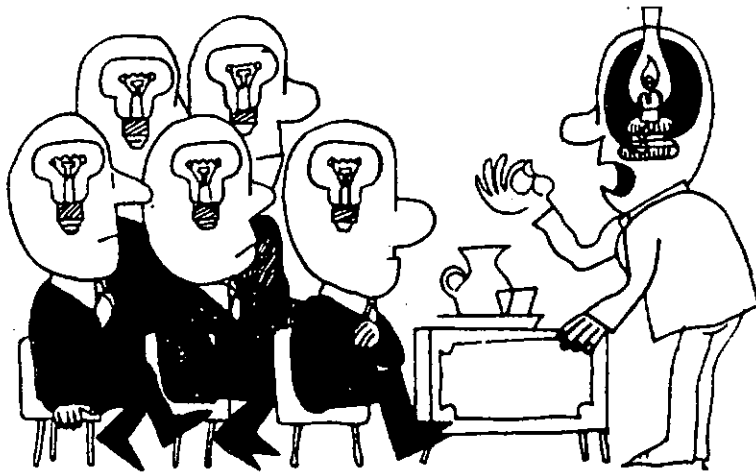


معماهایی باماهیت ریاضی

قسمت سوم: معادله های سیاله

• هوشنگ شرقی



بی شمار زوج عددهای صحیح در این رابطه صدق می کنند. (آیا می توانید بگویید چند زوج عدد طبیعی در این رابطه، صادق هستند؟) در این مقاله، بنای ما بر ارائه راه حل های، حل معادله های سیاله نمی باشد و خواننده علاقه مند می تواند برای اطلاع از روش های مختلف حل معادله های سیاله، به کتابهای مربوط مراجعه نماید. (معادله های سیاله بخشی از مباحث نظریه اعداد می باشد و یکی از انواع ساده آن، یعنی معادله سیاله درجه اول $ax + by = c$ در کتاب ریاضی گسسته دوره پیش دانشگاهی بحث شده است.) اما در ضمن حل مسائل، سعی می شود اشاره ای نیز به شیوه حل مسائل شود؛ ولی وارد جزئیات مباحث مربوط به حل معادله نمی شویم. هدف اصلی این مقاله، اشاره به معماهایی است که به کمک معادله های سیاله حل می شوند. در شماره های قبل، معماهایی که ریشه در بحث استقرای ریاضی و نظریه گرافها داشت، بررسی کردیم، و در این شماره، به معماهایی می پردازیم که پاسخ آنها با حل معادله ای سیاله به دست می آید. در بسیاری از معماها، جوابها باید در مجموعه عددهای طبیعی به دست آید و این کار را آسان تر می کند.

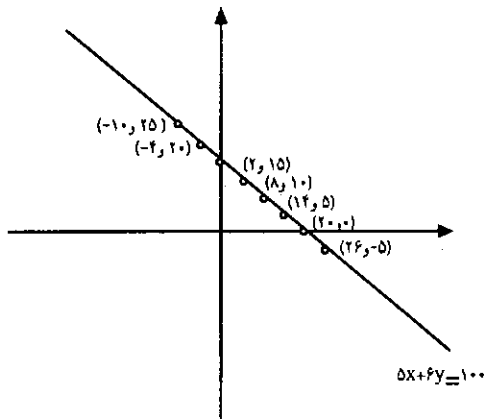
الف - معادله سیاله درجه اول $(ax + by = c)$

معادله سیاله درجه اول، در حالت کلی، جوابهای بی شماری

همه دانش آموزان علاقه مند رشته ریاضی، احتمالاً با مفهوم معادله سیاله آشنایی دارند و می دانند معادله سیاله، معادله ای است که جوابهای آن در مجموعه عددهای صحیح بررسی می شود. به عبارت دیگر، هدف از حل یک معادله سیاله، یافتن مجموعه عددهای صحیحی می باشد که در معادله صدق می کنند. معادله های سیاله، انواع بسیاری دارند و زیبایی مباحث آنها در این است که در بیشتر موارد، با یک معادله با بیش از یک مجهول سروکار داریم که ممکن است مجموعه جوابهای صحیح آن، کاملاً محدود باشد. به عنوان مثال، معادله سیاله $y = \frac{2x-3}{x-1}$ را در نظر بگیرید.

می توان ثابت نمود که تنها جوابهای صحیح این معادله، زوجهای $(2,1)$ و $(0,3)$ می باشند و این از نظر هندسی، معادل با آن است که روی منحنی تابع، با ضابطه $y = \frac{2x-3}{x-1}$ تنها دو نقطه $A(2,1)$ و $B(0,3)$ با مختصات صحیح وجود دارند. همچنین می توان ثابت کرد که تنها و تنها یک سه تایی از عددهای صحیح در رابطه $x^3 = 2y^3 + 4z^3$ صدق می کند، که روشن است، سه تایی $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ می باشد. البته در بسیاری از موارد نیز معادله سیاله می تواند دارای جوابهای بی شماری باشد. به عنوان مثال، معادله $x + y = 5$ را در نظر بگیرید. با کمی دقت، واضح است که

روی خط $5x + 6y = 100$ نقطه‌های بی‌شماری با مختصات صحیح وجود دارد، که همگی آنها به صورت $(6k - 4, 20 - 5k)$ می‌باشند:



بعضی از این نقاط که به ازای مقادیر مختلف k به دست آمده‌اند، در شکل مشخص شده‌اند. اما همان‌طور که از مسئله برمی‌آید، در این جا هدف ما تنها تعیین مجموعه جوابهای طبیعی یا صفر می‌باشد، که فقط چهار زوج $(2, 15)$ ، $(8, 10)$ ، $(14, 5)$ و $(20, 0)$ را شامل می‌شود. برای به دست آوردن این چهار جواب، دقت می‌کنیم که x و y ، چون تعداد خودکار و مداد می‌باشند، نمی‌توانند عددهای منفی باشند؛ یعنی لازم است که $20 - 5k \geq 0$ و $6k - 4 \geq 0$ و از

آن جا به دست می‌آید $\frac{2}{3} \leq k \leq 4$ ، و چون $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد، پس

$k = 1, 2, 3, 4$ که به ازای این چهار مقدار، همان چهار زوج به دست می‌آید؛ یعنی او می‌تواند ۲ خودکار و ۱۵ مداد یا ۸ خودکار و ۱۰ مداد یا ۱۴ خودکار و ۵ مداد بخرد یا این که تنها ۲۰ خودکار بخرد. اکنون اگر شرط دیگری نیز به مسئله اضافه شود، می‌توان جواب مسئله را دقیق‌تر به دست آورد. مثلاً فرض کنید قید زیر به مسئله اضافه شود:

«او چند مداد و چند خودکار خریده است؛ اگر به حداکثر ۶ مداد نیاز داشته باشد و بخواهد حتماً مداد نیز بخرد.»
واضح است که با این شرط، تنها جواب مسئله $x = 14$ و $y = 5$ است؛ یعنی او ۱۴ خودکار و ۵ مداد خریده است. اکنون با روش‌تر شدن موضوع، می‌توان معماهایی را مطرح و حل نمود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: سه ماهیگیر از یک صبح تا شب، ماهیگیری نموده و شب را به استراحت می‌پردازند. صبح، اولین ماهیگیر از خواب

دارد؛ به شرطی که $c | (a, b)$ ، یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b ، عدد c را بشمارد؛ ولی در مجموعه عددهای طبیعی، این معادله، تعداد محدودی جواب دارد. بگذارید با یک مثال آغاز کنیم.

مثال: قیمت یک خودکار ۱۵ تومان و قیمت یک مداد، ۱۸ تومان می‌باشد. علی با ۳۰۰ تومان پول خود، چند مداد و چند خودکار می‌تواند بخرد؟

روشن است که اگر مسئله را با نمادهای ریاضی نمایش دهیم، با فرض این که x خودکار و y مداد بخرد، به معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم:

$$15x + 18y = 300$$

$$5x + 6y = 100$$

یا این که:

بدیهی است که این معادله در مجموعه عددهای حقیقی، جوابهای بی‌شماری دارد؛ اما در مجموعه عددهای صحیح نیز مسئله در حالت کلی، جوابهای بی‌شماری دارد؛ زیرا $(5, 6) = 1$ و $100 | 100$ ؛ یعنی ۱۰۰ بر ۱ بخش پذیر است. اکنون دقت کنید که چگونه مجموعه جوابهای صحیح این معادله را به دست می‌آوریم. یکی از دو متغیر (مثلاً y) را بر حسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم:

$$5x + 6y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 5x}{6}$$

اکنون سعی می‌کنیم عدد ۱۰۰ و متغیر $5x$ را به دو قسمت، طوری بنویسیم که هر دو بر مخرج کسر (یعنی ۶) بخش پذیر باشند؛

$$y = \frac{96 - 6x + 4 + x}{6}$$

یعنی می‌نویسیم:

و پس از تفکیک کسر، خواهیم داشت:

$$y = 16 - x + \frac{x + 4}{6}$$

روشن است که اگر y بخواهد عددی صحیح باشد، باید $x + 4$ بر ۶ بخش پذیر باشد؛ یعنی $x + 4 = 6k$ و از آن جا $x = 6k - 4$ و به دست می‌آید: $y = 20 - 5k$ ؛ به عبارت دیگر، همه زوج عددهای صحیح، به صورت $(x = 6k - 4, y = 20 - 5k)$ در معادله صدق می‌کنند و با امتحان نیز می‌توان به همین نتیجه رسید و باز روشن است که به ازای مقادیر مختلف k ، زوجهای مختلفی برای (x, y) به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر $k = 1$ باشد، به دست می‌آید: $(x, y) = (2, 15)$ و به ازای $k = 5$ ، $(x, y) = (26, -5)$. تعبیر هندسی موضوع فوق، این است که

برای این که x عددی صحیح باشد، لازم است که $n+1=4k$ و از آن جا به دست می آید: $n=4k-1$ و لذا داریم:

$$x=28k-7+5-k \Rightarrow x=27k-2$$

اکنون برای آن که x عددی طبیعی باشد، کافی است $k \geq 1$ باشد که کمترین مقدار x به ازای $k=1$ به دست می آید که مساوی ۲۵ می باشد؛ یعنی حداقل تعداد ماهیهای صیدشده، ۲۵ عدد بوده است. درستی پاسخ را با پیدا کردن سهم سه ماهیگیر تحقیق کنید. اگر بدانیم تعداد ماهیها بین ۷۰ تا ۱۰۰ ماهی بوده است، چند ماهی صید شده است؟

مثال ۲: یک اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به چند طریق می توان به اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و ۵۰ تومانی خرد کرد؟
حل: فرض کنیم x اسکناس ۱۰۰ تومانی و y اسکناس ۵۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد؛ بنابراین، به زبان ریاضی می توان نوشت:

$$100x + 50y = 1000 \Rightarrow 2x + y = 20$$

برای حل این معادله سیاله، براحتی می نویسیم:

$$y = 20 - 2x$$

اکنون به ازای هر عدد صحیح $n=k$ ، یک عدد صحیح $y=20-2k$ به دست می آید. برای آن که جوابهای معادله را در مجموعه عددهای صحیح مثبت یا صفر بیابیم، می نویسیم: $x \geq 0$ و $20-2k \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ و از آن جا به دست می آید: $0 \leq k \leq 10$ ؛ یعنی برای k یازده امکان وجود داشته و از آن جا مسأله، یازده جواب دارد که عبارت است از:

و (۵، ۱۰) و (۱۴، ۱۲) و (۳، ۱۴) و (۲، ۱۶) و (۱، ۱۸) و (۰، ۲۰) و (۱۰، ۰) و (۹، ۲) و (۸، ۴) و (۷، ۶) و (۶، ۸)

که مؤلفه اول، هر زوج تعداد اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و مؤلفه دوم، تعداد اسکناسهای ۵۰ تومانی را مشخص می کند.

مثال ۳: اکنون مسأله را قدری تعمیم می دهیم. فرض می کنیم بخواهیم اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی خرد کنیم، چند امکان مختلف وجود دارد؟

حل: فرض کنیم x اسکناس ۵۰ تومانی، y اسکناس ۱۰۰ تومانی و z اسکناس ۲۰۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد. بنابراین می توان نوشت:

$$50x + 100y + 200z = 1000$$

و یا این که: $x + 2y + 4z = 20$ ، اکنون بسادگی به دست می آید:

بیدار و ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم نموده و سهم خود را برمی دارد و یک ماهی اضافه را به دریا می اندازد و می رود. سپس نفر دوم از خواب برخاسته و به تصور آن که ماهیگیر دوم چیزی بر نداشته است و در همان اطراف می باشد، ماهیهای باقی مانده را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و باز یک ماهی را که اضافه مانده به دریا انداخته و می رود. نفر سوم نیز پس از بیدار شدن، با همان تصور، ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و یک ماهی اضافه را به دریا می اندازد و می رود. حداقل تعداد ماهیهای گرفته شده، چه قدر بوده است؟
حل: فرض می کنیم تعداد ماهیهای اولیه، x بوده باشد. از

فرض مسأله، بلافاصله برمی آید که $x=3t+1$ ماهیگیر اول یک ماهی را دور انداخته و t ماهی را برمی دارد، لذا $2t$ ماهی می ماند. چون ماهیگیر دوم نیز با همین وضع روبه رو شده است، پس $2t=3m+1$ (زیرا ماهیهای باقی مانده نیز پس از تقسیم به ۳، یک ماهی اضافه داشتند)، ماهیگیر دوم نیز یک ماهی اضافه را دور انداخته و m ماهی را برمی دارد، پس $2m$ ماهی باقی می ماند و چون ماهیگیر سوم نیز با وضعی مشابه دو ماهیگیر قبل، روبه رو شده است، پس می توان نوشت: $2m=3n+1$ و از این معادله ها به دستگاه معادله های زیر می رسم:

$$\begin{cases} 2m=3n+1 \\ 2t=3m+1 \\ x=3t+1 \end{cases}$$

m را از معادله اول بر حسب n به دست آورده، در معادله دوم قرار می دهیم:

$$m = \frac{3n+1}{2} \Rightarrow 2t = \frac{3(3n+1)}{2} + 1 = \frac{9n+3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow 2t = \frac{9n+5}{2} \Rightarrow t = \frac{9n+5}{4}$$

و t را در معادله سوم قرار می دهیم:

$$x = 3\left(\frac{9n+5}{4}\right) + 1 = \frac{27n+15}{4} + 1 = \frac{27n+19}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = 27n+19 \Rightarrow 4x - 27n = 19$$

و این یک معادله سیاله است که با همان روش گفته شده، حل می شود:

$$x = \frac{27n+19}{4} = \frac{28n+20-n-1}{4} = 7n+5 - \frac{n+1}{4}$$

آنها را در کتاب «ریاضیات انتخاب» یا «چگونه بدون شمارش بشماریم»، از نشر دانشگاهی، تألیف ایوان نیون و ترجمه بتول جذبی و علی عمیدی، فصلهای پنجم تا هفتم کتاب را مطالعه نماید.

مثال ۴: در طی مسابقه های فوتبال، تیم A پس از پنج بازی، ۱۰ امتیاز و تیم B پس از ۱۰ بازی، ۲۰ امتیاز به دست آورده اند. تعداد باخت های کدام یک از دو تیم بیشتر بوده است؟ (هر برد ۳ امتیاز، هر مساوی ۱ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد).

حل: اگر تعداد بردهای تیم A، x_1 و تعداد مساویهای آن، y_1 و تعداد باخت های آن، z_1 باشد، مطابق مفروضهای مسئله داریم:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 5 \\ 3x_1 + y_1 = 10 \end{cases}$$

مشخص است که $x_1 \leq 3$ (زیرا اگر $x_1 > 3$ آن گاه، $3x_1 + y_1 > 10$).

اگر از معادله اول، y_1 را به دست آورده و در معادله دوم قرار دهیم، به دست می آید:

$$x_1 + 10 - 3x_1 + z_1 = 5 \Rightarrow 2x_1 - z_1 = 5 \Rightarrow z_1 = 2x_1 - 5$$

و چون $z_1 \geq 0$ ، بنابراین $2x_1 - 5 \geq 0$ و لذا $x_1 \geq \frac{5}{2}$ و بنابراین

داریم $\frac{5}{2} \leq x_1 \leq 3$ و چون x_1 عددی صحیح می باشد، پس تنها

جواب قابل قبول، $x_1 = 3$ می باشد و از آن جا $z_1 = 1$ و $y_1 = 1$. اما اگر تعداد بردهای تیم B را x_2 و تعداد تساویهای آن را y_2 و تعداد باخت های آن را z_2 بنامیم، با توجه به شرایط مسئله داریم:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 = 10 \\ 3x_2 + y_2 = 20 \end{cases}$$

و با همان روش، واضح است که $x_2 \leq 6$ و با قرار دادن y_2 از معادله دوم در معادله اول، نتیجه می شود:

$$y_2 = 20 - 3x_2 \Rightarrow x_2 + 20 - 3x_2 + z_2 = 10 \Rightarrow z_2 = 2x_2 - 10$$

$$= 2x_2 - 10 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq 5$$

یعنی داریم: $5 \leq x_2 \leq 6$ بنابراین، برای x_2 ، دو جواب ۵ و ۶ قابل قبول است و از آن جا دو سری جواب زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5 \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$$x = 20 - (2y + 4z)$$

و چون $x \geq 0$ می باشد، داریم:

$$20 - (2y + 4z) \geq 0 \Rightarrow 2y + 4z \leq 20 \Rightarrow y + 2z \leq 10$$

حال اگر $y + 2z = m$ فرض شود، داریم:

$$y = m - 2z$$

و چون $y \geq 0$ می باشد، پس داریم: $m - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{m}{2}$

و از آن جایی که $m \leq 10$ می باشد، بنابراین: $z \leq 5$

حال به ازای مقادیر مختلف z ($z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) مقادیر مختلفی برای y بر حسب m به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} z = 5 \\ y = m - 10 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} z = 4 \\ y = m - 8 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} z = 3 \\ y = m - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ y = m - 4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} z = 1 \\ y = m - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = m \end{cases}$$

و برای m نیز ۱۱ امکان مختلف ($m = 0, 1, 2, \dots, 10$) وجود دارد که البته همه آنها با توجه به مثبت یا صفر بودن y در هر مورد قابل قبول نخواهند بود. در حالت $z = 5$ ، فقط $m = 10$ مورد قبول بوده و از آن جا $x = 0$ و $y = 0$ و در حالت $z = 4$ ، $m = 10, 9, 8$ قابل قبول بوده و از آن جا زوجهای $(4, 0)$ ، $(3, 1)$ و $(2, 2)$ برای x و y حاصل می شود و با همین روش، همه سه تایی های قابل قبول برای x ، y و z را که تعداد آنها ۳۶ تا می باشد، به صورت زیر می توان مشخص نمود:

و $(2, 3, 3)$ و $(0, 4, 3)$ و $(0, 2, 4)$ و $(2, 1, 4)$ و $(4, 0, 4)$ و $(0, 0, 5)$ و $(4, 4, 2)$ و $(2, 5, 2)$ و $(0, 6, 2)$ و $(8, 0, 3)$ و $(6, 1, 3)$ و $(4, 2, 3)$ و $(6, 3, 2)$ و $(0, 8, 1)$ و $(12, 0, 2)$ و $(10, 1, 2)$ و $(8, 2, 2)$ و $(2, 7, 1)$ و $(14, 1, 1)$ و $(12, 2, 1)$ و $(10, 3, 1)$ و $(8, 4, 1)$ و $(6, 5, 1)$ و $(4, 6, 1)$ و $(8, 6, 0)$ و $(6, 7, 0)$ و $(4, 8, 0)$ و $(2, 9, 0)$ و $(0, 10, 0)$ و $(16, 0, 1)$ و $(20, 0, 0)$ و $(18, 1, 0)$ و $(16, 2, 0)$ و $(14, 3, 0)$ و $(12, 4, 0)$ و $(10, 5, 0)$

یعنی ۳۶ روش مختلف برای خرد کردن یک اسکناس هزار تومانی به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی وجود دارد. البته اگر هدف، تنها شمارش تعداد روشها بود، مسئله به مباحث آنالیز ترکیبی مربوط می شد و روشهایی برای شمارش تعداد جوابهای مثبت و صفر معادله های سیاله درجه اول (بدون به دست آوردن خود جوابها) وجود دارد که خواننده علاقه مند می تواند به تفصیل،

بوده است. اینک معماهای زیر که همگی به حل معادله‌ای سیاله از درجه اول ختم می‌گردند، برای تمرین اضافی ارائه می‌شوند. تلاش کنید با حل آنها مباحث طرح شده را برای خود تکرار کنید.

۱- عدد ۲۰۰۰ را به دو عدد چنان تقسیم کنید، که یکی مضرب ۱۲ و دیگری مضرب ۱۵ باشد؛ مسأله چند جواب دارد؟

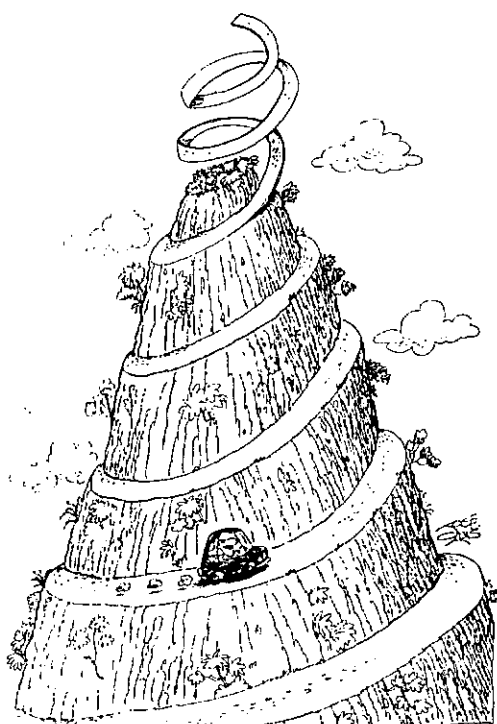
۲- علی با ۵۰۰ تومان پول خود روی هم ۶۰ تمبر خرید که شامل تمبرهای ۳، ۵ و ۱۰ تومانی بودند. او از هر یک از این تمبرها چند عدد خریده است. اگر از هر یک حداقل ۶ عدد خریده باشد.

۳- عدد ۱۰۰ را به صورت مجموع سه عدد بنویسید که یکی مضرب ۵، دیگری مضرب ۷ و دیگری مضرب ۱۱ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴- یک اسکناس صدتومانی را به چند طریق می‌توان به اسکناسهای ۱۰، ۲۰ و ۵۰ تومانی خرد کرد؟

۵- علی و رضا هر یک مقداری پول دارند و پول احمد، مساوی مجموع $\frac{3}{4}$ پول علی و $\frac{7}{5}$ پول رضا می‌باشد. احمد حداقل چه قدر پول دارد؟

۶- ۱۳۷۷ و ۱۳۷۸ دو عدد متوالی هستند که اولی مضرب ۱۷ و دومی مضرب ۱۳ می‌باشد. چند سال دیگر دوباره برای عدد دو سال شمسی متوالی، همین وضعیت رخ می‌دهد؟



بنابراین z_1 می‌تواند از z_2 بزرگتر یا کوچکتر باشد؛ یعنی نمی‌توان گفت که تعداد باخت‌های کدام تیم بیشتر بوده است؛ ولی می‌توان گفت تعداد بردهای تیم B و تعداد مساوی‌های آن، بیشتر بوده است. مثال ۵: اینک به مسأله‌ای از المپیاد ریاضی شوروی سابق در سال ۱۹۸۷ توجه کنید:

عمودریا هر عصر از بین ۲۳ پهلوانی که برای نگهداری نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاح‌دید خود انتخاب می‌کند. حداقل پس از چند روز، همه پهلوانان به تعداد برابر نگهداری داده‌اند؟

حل: ظاهر مسأله به هیچ عنوان ارتباط آن را با بحث ما نشان نمی‌دهد؛ ولی اگر کمی دقت کنیم، درمی‌یابیم که درواقع، با حل یک مسأله معادله سیاله مواجه هستیم. اگر فرض کنیم پس از این مدت، همه پهلوانان به تعداد برابر، m روز نگهداری داده باشند، بنابراین، تعداد کل روزهای نگهداری آنها $33m$ می‌باشد؛ اما از آنجایی که هر عصر ۹ یا ۱۰ پهلوان نگهداری می‌دهند، پس اگر x عصر، ۹ پهلوان و y عصر، ۱۰ پهلوان نگهداری داده باشند، می‌توان نوشت:

$$9x + 10y = 33m$$

$$m = 1 \Rightarrow 9x + 10y = 33 \Rightarrow y = \frac{33 - 9x}{10}$$

$$= \frac{30 - 10x + 3 + x}{10} \Rightarrow y = 3 - x + \frac{3+x}{10}$$

ولذا $x + 3 = 10k$ و $x = 10k - 3$ و $y = 6 - 9k$ و با توجه به این که $x \geq 0$ و y به دست می‌آید $\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{3}{10}$ و چون $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین، برای k هیچ مقداری به دست نمی‌آید و مسأله جواب ندارد. به ازای $m = 2$ خواهیم داشت:

$$9x + 10y = 66 \Rightarrow y = \frac{66 - 9x}{10} = \frac{70 - 10x + x - 4}{10}$$

$$\Rightarrow y = 7 - x + \frac{x - 4}{10} \Rightarrow x - 4 = 10k \Rightarrow x = 10k + 4$$

و $y = 3 - 9k$ که با توجه به مثبت بودن x و y ، به دست می‌آید

$$-\frac{4}{10} \leq k \leq \frac{1}{3}$$

پهلوانان در مجموع، ۷ عصر نگهداری داده‌اند که ۴ عصر آن، ۹ نفره و ۳ عصر آن، ۱۰ نفره بوده‌اند و هر پهلوان، ۲ عصر نگهداری