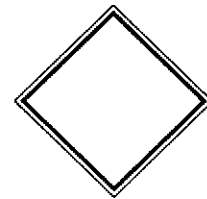




معماهایی با ماهیت ریاضی

(قسمت دوم)

(نظریه گرافها)



● هوشنگ شرقی

اردوی تفریحی رفته‌اند و با خود یک دوربین عکاسی با یک حلقه فیلم ۳۶ تایی همراه می‌پرند. در محل اردو، هر معلم از دانش‌آموزانی که شاگرد او بوده‌اند، عکس می‌گیرد و هر دانش‌آموز از معلمانی که استاد او نیستند، عکس می‌گیرد. (بدیهی است که دو معلم می‌توانند هر دو، استاد یک دانش‌آموز بوده باشند) و پس از پایان کار، تمام حلقه فیلم دوربین تمام می‌شود. تعداد دانش‌آموزان چند نفر بوده است؟

حل: اگر مسأله را بخواهیم با تشکیل معادله، حل کنیم قدری دشوار است؛ زیرا هر دانش‌آموز می‌تواند از یک یا دو یا هر سه معلم عکس گرفته یا از هیچ کدام عکس نگرفته باشد و نیز هر معلم می‌تواند از هر تعداد دانش‌آموز عکس گرفته یا از هیچ کدام نگرفته باشد. لذا فرموله کردن مسأله مشکل است. اما یک مدل گرافیکی، حل مسأله را بسیار آسان می‌کند؛ خواننده‌ای که با نظریه گراف آشنایی دارد، گراف دو پارچه را بخوبی می‌شناسد؛ یعنی گرافی که رؤوس آن در دو مجموعه جدا از هم واقعند و رؤوس هر مجموعه، تنها با رؤوس مجموعه دیگر ارتباط داشته و با رؤوس مجموعه خودش ارتباطی ندارد و رؤوس یالهای این گراف، از

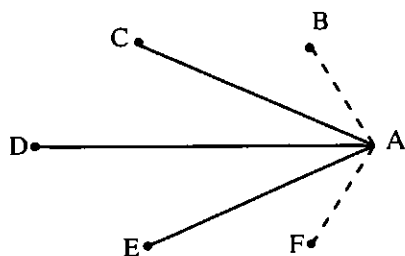
بحث معماهایی با ماهیت ریاضی را در شماره پیش، با اشاره به معماهایی که با اتکا به قضیه استقرای ریاضی حل می‌شوند، آغاز کردیم. اینک و در این شماره، به معماهایی می‌پردازیم که ریشه در نظریه «گرافها» دارند و به کمک قضیه‌های آن حل می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصول این نظریه آشنایی دارد؛ اما برای اطلاع بیشتر، مطالعه بخش اول از کتاب ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی مفید می‌باشد. در ضمن، حل هر مسأله نیز به قضیه خاص که برای حل معما از آن استفاده شده، اشاره کرده‌ایم. معمولاً در اکثر مسائلی که ارتباطهایی مطرح است، مانند دوستی، آشنایی، دست دادن، نامه نوشتن، مسابقه دادن و ... می‌توان یک الگوی گرافیکی برای حل مسأله ایجاد نمود. رؤوس گراف می‌توانند افراد، تیمها و ... بوده و یالهای گراف معرف وجود ارتباط بین آنها (از نوع دوستی، دست دادن و ...) یا عدم وجود ارتباط باشد. هر یک از مثالهای زیر، می‌تواند نمونه‌ای از این نوع مسائل باشد. همچون قبل، توصیه می‌شود که پیش از دیدن راه حل مسأله، در مورد آن بخوبی فکر شود تا حداقل به طور شهودی، با ساختمان مسأله آشنایی به دست آید.

مثال ۱: سه نفر معلم و تعدادی دانش‌آموز دبیرستانی به یک

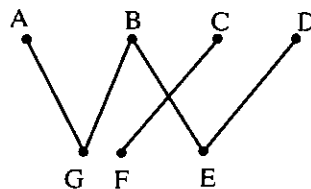
قضیه‌ای ابتدایی در نظریهٔ گرافها می‌گوید، تعداد رؤوس، با درجهٔ فرد در هر گراف، عددی زوج می‌باشد؛ بنابراین، تعداد افرادی که با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است!

مثال ۳: ثابت کنید: در هر جمع ۶ نفره از افراد، همیشه می‌توان سه نفر را یافت که یا هر سه با هم دو به دو آشنا و یا هر سه با هم دو به دو ناآشنا باشند.

حل: یک مدل گرافیکی مناسب برای حل مسألهٔ فوق، آن است که افراد را رؤوس یک گراف با شش رأس در نظر بگیریم. یال آشنایی را با یک رنگ و یال ناآشنایی را با رنگ دیگر در نظر بگیریم. (در شکل، یال آشنایی را توپر و یال ناآشنایی را با خط چین نمایش داده‌ایم). در این صورت، چون هر دو نفر دلخواه با هم یا آشنایند و یا ناآشنا، پس هر دو رأس این گراف، با یکی از این دو نوع یال (توپر یا خط چین) به هم مربوط می‌شوند و یک گراف کامل به دست می‌آید. روشن است که برای یک رأس دلخواه (مانند A) پنج یال خروجی از دو نوع داریم؛ بنابراین الزاماً حداقل سه تای آنها از یک نوع می‌باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول آن که، سه یال خروجی توپر داشته باشیم (یعنی شخص A یا سه نفر آشنا باشند). مطابق شکل، واضح است که دو رأس از سه رأس C، D و E یا حداقل با یک یال توپر به هم مربوط می‌شوند که در این صورت، این یال با دو یال توپر دیگر خارج شده از A، تشکیل یک مثلث با یالهای توپر می‌دهند. (مثلاً مثلث ACE) یا این که هیچ کدام از آنها، با یال توپر به هم وصل نمی‌شوند، که در این صورت، یک مثلث با یالهای خط چین تشکیل می‌شود (مثلث CDE)؛ یعنی در هر حال، ما یا یک مثلث با سه یال توپر و یا یک مثلث با سه یال خط چین خواهیم داشت، که معادل آن است که در هر حال، سه نفر یافت می‌شوند که دو به دو با هم آشنا باشند یا سه نفر پیدا می‌شوند که دو به دو با هم ناآشنا باشند. حالت دیگری که حداقل سه یال خط چین را از رأس A خارج می‌شوند، به طریق مشابه می‌توان بررسی کرد و به



یک مجموعه نمی‌باشند. مانند گراف زیر:



که مجموعهٔ یالهای آن به صورت

$$V = \{ AG, BG, CF, DE, BE \}$$

می‌باشند.

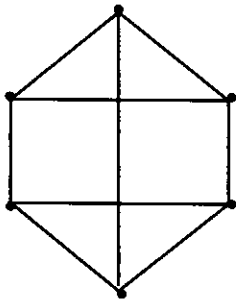
اینک مسأله را می‌توان یک گراف دو پارچه در نظر گرفت که در یک مجموعه، رؤوس معلمان و در مجموعهٔ دیگر، دانش‌آموزان قرار گرفته‌اند. دو رأس به هم وصل می‌شوند. اگر هر یک از دو طرف از دیگری عکس بگیرد (توجه کنید که لازم نیست گراف جهت‌دار فرض شود؛ زیرا لزومی ندارد که دو طرف از هم عکس بگیرند و در واقع هرگز چنین نمی‌شود)، حال دیده می‌شود که هر معلم فقط از شاگردان خودش عکس می‌گیرد و هر شاگرد از معلمانی که استاد او نبوده‌اند، عکس می‌گیرد. پس هر دو رأس، متعلق به این دو مجموعه به صورت منحصر به فردی با یک و فقط یک یال به هم وصل می‌شود (اگر دانش‌آموز، شاگرد معلم باشد، یالی از طرف معلم به طرف شاگرد، و اگر نباشد، یالی از طرف شاگرد به طرف معلم رسم می‌شود و فقط یکی از این دو صورت ممکن است) و بنابراین، یک گراف دو پارچهٔ کامل به دست می‌آید که یک مجموعهٔ آن، شامل ۳ عضو (معلمان) و دیگری شامل x عضو (تعداد شاگردان) می‌شود و لذا تعداد کل یالهای این گراف، می‌شود $3x$ ؛ اما هر یال متناظر با یک قطعه عکس است و تعداد کل عکسها ۳۶ تا می‌باشد. پس $3x = 36$ و لذا $x = 12$ ؛ یعنی ۱۲ نفر دانش‌آموز به اردو رفته‌اند.

مثال ۲: ثابت کنید تعداد افرادی که در طول تاریخ بشر، با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است.

حل: ممکن است مسأله به ظاهر مشکل بیاید؛ اما با وقوف به نظریهٔ گرافها بسیار آسان می‌باشد. هریک از افراد بشر (از آغاز تاکنون) را رأس یک گراف در نظر بگیرید. انسانهایی که با هم (حداقل یک بار) دست داده‌اند، با یک یال به هم وصل کنید و در غیر این صورت، آنها را به هم وصل نکنید. درجهٔ هر رأس این گراف، تعداد افرادی است که آن فرد با آنها دست داده است.

مثال ۵: در یک کنفرانس خبری ۳۰ خبرنگار حاضرند و هر نفر درست از اخبار k نفر از گروه مطلع است. حداقل k چه باشد تا این که بتوانیم بگوییم حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که از اخبار یکدیگر مطلعند؟

حل: خواننده‌ای که با گراف k - منتظم آشنایی دارد، می‌داند که این مسئله نیز الگویی از آن گراف را دارد؛ یعنی گرافی که درجه هر رأس آن k می‌باشد. مثلاً در شکل زیر، یک گراف مرتبه ۶ و سه منتظم رسم شده است:



در مسئله فوق، یک گراف از مرتبه ۳۰ و k منتظم داریم. قضیه‌ای ابتدایی می‌گوید: در یک گراف با n رأس، حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ یال داریم (گراف کامل n رأسی یا $n-1$ منتظم).

و می‌دانیم تعداد یالهای گراف مسئله ما $30k$ می‌باشد. اگر این تعداد از حداکثر تعداد یالهای گراف کامل با ۳۰ رأس یعنی $\frac{30(30-1)}{2}$ بیشتر باشد، شرط مسئله تحقق می‌یابد؛ یعنی حداقل

یکی از یالها دو طرفه می‌شود و این، به معنای آن خواهد بود که دو خبرنگار از اخبار هم مطلعند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

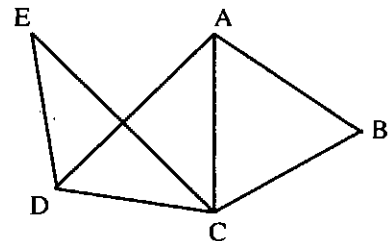
$$\frac{30 \times 29}{2} < 30k \Rightarrow k > 14/5 \Rightarrow k = 15$$

یعنی حداقل k مساوی ۱۵ است.

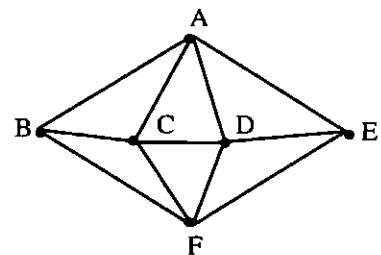
مثال ۶: خطوط هوایی بین شهرهای یک کشور، طوری تنظیم شده است که هر شهر حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. در ضمن، برای مسافرت از هر شهر به هر شهر دیگر، بیش از یک بار نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور چه قدر است؟

همین نتیجه رسید، که بررسی آن به عهده خواننده علاقه مند می‌باشد.
مثال ۴: اینک تعدادی دانش آموز را در نظر بگیرید که برای شرکت در اردو به جنگلی رفته‌اند و بین درختها پراکنده شده‌اند. به طوری که همه همدیگر را نمی‌بینند؛ ولی می‌دانیم که هر دو نفر دلخواه، یک نفر را به صورت مشترک می‌بینند. و روشن است که دیدن، یک رابطه تقارنی است، ولی یک رابطه تعدی نمی‌باشد؛ یعنی اگر A ، B را ببیند، B هم A را می‌بیند؛ ولی اگر A ، B را و B ، C را ببیند، الزاماً A ، C را نمی‌بیند. بگویید عده دانش آموزان حداقل چند نفر می‌باشد؛ اگر بدانیم هیچ کس وجود ندارد که همه را ببیند؟

حل: این یک مسئله خالص از گرافهاست، که بدون تجسم گرافیکی، قابل حل نمی‌باشد. در واقع، به زبان گرافها مسئله ما به این مسئله ساده تبدیل می‌شود؛ یعنی: یافتن یک گراف با n رأس که هر دو رأس آن، به یک رأس مشترک با دو یال مرتبط باشند و هیچ رأس آن، به تمام رؤوس مرتبط نباشد. بسادگی می‌توان فهمید که تا گراف مرتبه ۵ چنین کاری مقدور نیست و مطابق شکل، ممکن است فردی پیدا شود که همه افراد را ببیند (با حفظ شرط مسئله).



اما یک گراف با شش رأس می‌توان رسم نمود و بروشنی دید که اگر بخواهیم شرط مسئله حفظ شود، (وصل بودن هر دو رأس به یک رأس مشترک) هرگز نمی‌توان یک رأس را به تمام رؤوس وصل کرد:



اگر عده افراد از شش هم بالاتر باشد، به همین ترتیب مسئله حل می‌شود؛ یعنی عده دانش آموزان باید حداقل شش نفر باشد.

(۵) یک شرکت خصوصی، نیاز به یک مهندس الکترونیک، یک مهندس صنایع، سه نفر برنامه‌نویس کامپیوتر، دو نفر طراح سیستم و یک نفر حسابداری دارد. احمد حسابداری است و در ضمن، برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. حسین برنامه‌نویس کامپیوتر است و طراحی سیستم را هم می‌شناسد. رضا مهندس صنایع است و طراحی سیستم هم انجام می‌دهد. علی نیز برنامه‌نویس کامپیوتر و طراح سیستم است. محمد مهندس صنایع است و در ضمن، با حسابداری آشنایی دارد. و محسن مهندس الکترونیک می‌باشد و برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. آیا این شرکت می‌تواند ضمن برآورده کردن نیازهای شغلی خود، به همه این افراد، شغلی واگذار کند؟ چگونه و به چند طریق؟

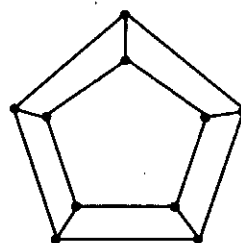
(۶) ۲۵ تیم فوتبال برای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست کم چند بازی باید انجام دهند تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشند که بازی خود را انجام داده باشند؟ (۷) n نقطه را به کمک پاره‌خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرده‌ایم که از هر نقطه، بتوان از طریق این پاره‌خطها به بقیه نقطه‌ها عبور کرد و در ضمن، دو نقطه‌ای پیدا نشوند که با دو مسیر به هم وصل شده باشند. ثابت کنید تعداد کل پاره‌خطهای راست برابر است با $n-1$.

(راهنمایی: از خواص گرافی به نام درخت استفاده کنید.) (۸) هفده نفر از طریق پست با هم مکاتبه می‌کنند، به طوری که هر شخص، با همه افراد دیگر مکاتبه دارد. در نامه‌های آنان، تنها سه موضوع مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. هر زوج از مکاتبه‌کنندگان، تنها به یکی از موضوعها می‌پردازند. «...» کنید حداقل سه نفر وجود دارند که درباره موضوع واحدی به یکدیگر نامه می‌نویسند.

(راهنمایی: گرافی با هفده رأس را در نظر بگیرید که همه یالهای آن، به سه رنگ مختلف می‌باشند؛ بنابراین، از یک رأس آن، حداقل شش یال به یک رنگ خارج شده است و ...).



حل: این مسأله، راه حل ساده‌ای دارد. در واقع از هر شهر مانند A، حداکثر ۴ سه شهر ارتباط وجود دارد و از هر کدام از آن سه شهر، به دو شهر (غیر از A) ارتباط وجود دارد. پس حداکثر تعداد شهرهای این کشور، می‌تواند $1+3+3 \times 2$ باشد (چرا؟) یعنی ۱۰ شهر؛ اما ارتباط این مسأله با نظریه گراف، انطباق ویژه‌ای است که بین این مسأله و یک نوع خاص از گرافها، یعنی گراف «پترسن» وجود دارد. مطابق شکل، این ارتباط می‌تواند بین شهرها (که رؤوس گراف پترسن می‌باشند) با هم توسط یالهای گراف پترسن انجام شود و شرایط مسأله محفوظ باشد و گراف مطلوب ۱۰ رأس داشته باشد:



تمرینها

(۱) سه خواهر با برادران خود، دور میزی نشسته‌اند و روی میز یک بشقاب شیرینی وجود دارد. هر خواهر به برادر بزرگتر و هر برادر به خواهر بزرگتر خود شیرینی می‌دهد و در آخر، بشقاب شیرینی که شامل ۱۲ شیرینی بوده است، خالی می‌شود. تعداد برادران چند نفر است؟

(۲) ثابت کنید در یک جمع ۱۸ نفره، همیشه می‌توان چهار نفر را پیدا کرد که یا همه دو به دو با هم آشنا باشند و یا این که همه دوه‌دو با هم ناآشنا باشند. و این تعمیمی است از مثال ۳. برای آشنایی کامل با این بحث و تعمیم کلی آن، به مجله آشنایی با ریاضیات جلد سی و چهارم، مقاله‌ای با عنوان «از اصل لانه کبوتر تا نظریه رامزی» از دکتر «شهریار شهریار» مراجعه شود.

(۳) سه روستای A، B و C را می‌خواهیم با سه جاده به سه بیمارستان D، E و F وصل کنیم. آیا ممکن است طوری این کار را انجام دهیم که هیچ کدام دو جاده یکدیگر را قطع نکنند؟ (راهنمایی: به مسأله گراف هامنی مراجعه نمایید.)

(۴) پانزده نفر دانش‌آموز در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا ممکن است هر کدام از آنان، دقیقاً با ۷ نفر از دانش‌آموزان دیگر دوست باشند؟