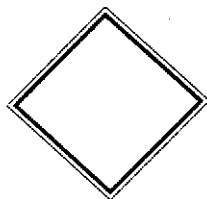


معماهای^۳

(قسمت اول)

● هوشنگ شرقی

با ماهیت ریاضی^۳



در ریاضیات و بخصوص ریاضیات نوین، همواره با مسأله‌هایی روبه‌رو بوده‌ایم که از آنها به‌عنوان ساختمانهای غیرعادی یاد می‌شود. مسائلی در محدوده این ساختمانها قرار دارند که به هیچ یک از گروه‌های کلاسیک ریاضی (جبر، آنالیز، ترکیبیات، هندسه و...) تعلق ندارند یا لااقل به‌طور مستقیم به آنها مربوط نمی‌باشند و در نظر اول، نمی‌توان تشخیص داد که به کدام مبحث ریاضی تعلق دارند. در مثالهایی که در این گفتار می‌آوریم، خواننده، این موضوع را به روشنی مشاهده می‌کند و زیبایی خیره‌کننده این مسائل را که در همین شناوری آنها نهفته است، درک می‌کند. مثلاً چه قدر زیباست که یک مسأله ریاضی که به نظر می‌رسد ماهیتی جبری دارد، به شیوه‌ای هندسی حل شود. در این جا ما تلاش کرده‌ایم مثالهای خود را به گونه‌ای طبقه‌بندی کنیم که مثالهای هر گروه، به نوعی، با یکی از مباحث کلاسیک ریاضی مربوط باشد (هر چند به ظاهر چنین به نظر نیاید) و این کار را با مسأله‌هایی آغاز می‌کنیم که به بحث استقرای ریاضی مربوط می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصل استقرای ریاضی که در کتابهای مختلف و از جمله کتاب جبر و احتمال سوم ریاضی، و ریاضی گسسته دوره پیش‌دانشگاهی و سایر کتابهای کمک درسی فراوان مورد بحث قرار گرفته است، آشنایی کافی دارد. پیش از شروع مثالها، اکیداً توصیه می‌کنیم، خواننده پیش از خواندن راه حل خود، روی مسأله، تدبیر کافی نماید که در این صورت، زیبایی مسأله‌ها را بهتر درک خواهد کرد.



حل مسأله‌هایی به کمک اصل استقرای ریاضی

مثال ۱: در یک جزیره دور افتاده و در دل آب و به دور از تمدن بشری، مردمان قبیله «تروگالیا» زندگی آرام خود را ادامه می‌دادند. در این نوع، زندگی بدوی این مردم، هیچ گونه وسیله ارتباط کلامی یا اشاره‌ای با هم نداشته و حتی آینه‌ای هم ندارند که چهره خود را در آن ببینند، و تنها و تنها رئیس قبیله است که با زبان خاص خود که همه افراد آن را می‌فهمند، می‌تواند برای افراد قبیله صحبت کند و دستورهای خود را که حتماً باید اجرا شود، به آنها ابلاغ نماید و این کار، هر روز صبح، یک بار در میدان اجتماعات عمومی قبیله انجام می‌شود، که در آن همه حاضر می‌شوند. آن روز صبح، رئیس قبیله با چهره‌ای پراخورخته، روبه همه افراد کرد و گفت: «در بین شما عده‌ای هستند که روی پیشانی خود، علامتی دارند، اینها فوری بروند و خودکشی کنند!» یک ماه بعد، جمعی از افراد خودکشی کردند. آنها چند نفر بودند و از کجا بی به این که روی پیشانی خود علامتی دارند، بردند؟ باز هم تکرار می‌شود که آنها هیچ وسیله‌ای برای دیدن چهره خود (اعم از آینه، آب شفاف یا ...) ندارند و هیچ نوع ارتباط زبانی یا اشاره‌ای هم با هم ندارند و با لمس کردن هم نمی‌توانند بی به وجود علامت روی پیشانی خود برند. و باز توصیه می‌کنیم، پیش از آن که وسوسه شوید، پاسخ را بخوانید و خوب به راه حل آن بیندیشید. در این صورت، به پیچیدگی معما بیشتر بی می‌برید.

پاسخ: شاید به طور مستقیم به نظر نیاید؛ ولی مسأله، ماهیتی استقرایی دارد. فرض کنید، تنها یک نفر در قبیله بر پیشانی خود، علامت داشته باشد، در این صورت، او با مشاهده سایر افراد که روی پیشانی خود علامت ندارند، فوری درمی‌یابد که تنها خودش روی پیشانی علامت دارد و همان روز اول، خودکشی می‌کند. اما اگر در قبیله دو نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها در بین جمع، یک نفر را دارای علامت می‌بیند و با آنکا به استدلال قبلی، می‌فهمد که اگر همان یک نفر دارای علامت باشد، باید روز حکم، خودکشی کند و لذا یک روز صبر می‌کند و چون پس از یک روز، متوجه عدم خودکشی آن نفر می‌شود، درمی‌یابد که خود نیز بر پیشانی علامت دارد و روز دوم، هر دو، همزمان خودکشی می‌کنند. لازم به ذکر است که در این جا سایر افراد دو نفر را می‌بینند که بر پیشانی علامت دارند و بیشتر (در قسمت بعدی می‌بینیم که دو روز) صبر می‌کنند. به همین ترتیب، اگر سه

نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها، می‌بینند که دو نفر بر پیشانی خود علامت دارند و مطابق استدلال قبل، اگر همین دو نفر علامت داشته باشند، باید روز دوم خودکشی نمایند، و چون روز سوم فرا رسید و هر سه نفر دیدند که هیچ کدام خودکشی نکرده‌اند، همه همزمان در روز سوم خودکشی می‌کنند. نکته جالب در این مسأله، تقارن دیدگاه همه افراد دارای علامت می‌باشد که احساس مشترکی را به آنها القا می‌کند و همین، برای سایر افراد نیز صادق می‌باشد.

حدس استقرایی چه می‌گوید؟ «اگر n نفر در قبیله، دارای علامتی بر پیشانی خود باشند، باید روز n ام خودکشی کنند.»

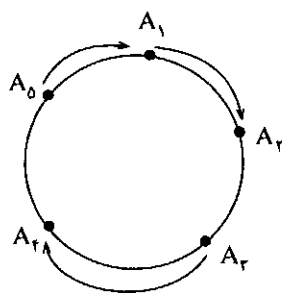
اکنون این حدس را به استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم: درستی گزاره برای $n=1$ را قبلاً ثابت کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم گزاره برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی اگر k نفر دارای علامت بر پیشانی خود باشند، روز k ام خودکشی کنند، درستی گزاره برای $n=k+1$ نیز بسادگی اثبات می‌گردد و گذر استقرایی انجام می‌شود. فرض کنیم: $k+1$ نفر در پیشانی خود علامت داشته باشند، هر یک از آنها چه می‌بینند؟ k نفر را که بر پیشانی علامت دارند و طبق فرض استقرا باید روز k ام خودکشی کنند. (اگر فقط همین k نفر علامت داشته باشند) پس k روز صبر می‌کنند و چون روز $k+1$ ام فرا رسد، همه همزمان می‌فهمند که خودشان نیز علامت دارند و همان روز، همگی به یقین رسیده و خودکشی می‌کنند. با توجه به حکم استقرای فوق، روشن است که وقتی این افراد روز سی‌ام خودکشی می‌کنند، باید سی نفر بوده باشند.

اینک یک سؤال بامزه از شما می‌کنیم: اگر این افراد، از دستور رئیس سرپیچی کنند و خودکشی نکنند، چه اتفاقی می‌افتد؟! مثال ۲: هر چند حق داشتید که بپرسید افراد قبیله مثال ۱ که این قدر فهیم هستند و توانایی استدلال استقرایی را دارند، چرا از حداقل لوازم تمدن بی‌بهره‌اند؛ ولی نباید غافل بود که تبعیت آنها از دستور ناخردانه رئیس خود، مبنی بر خودکشی بی‌دلیل، نشانه دوری آنها از تمدن انسانی است، اینک مثالی دیگر داریم از افرادی که به نوع دیگری از تمدن انسانی بدورند و به جای خودکشی، به دیگرکشی دست می‌زنند:

به تعداد ۴۰۹۶ نفر دور یک دایره ایستاده‌اند و همزمان، هر یک به سمت نفر بعدی خود (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) تیراندازی می‌کند. بدیهی است که نفر اول، نفر دوم را می‌کشد و نفر سوم، نفر چهارم را و... سپس همین روال تکرار می‌شود.

همان اولین نفر که شلیک کرده، زنده خواهد ماند.

اینک به طرح مسأله‌ای دیگر در همین راستا می‌پردازیم. اگر عدد افراد 2^n نباشد، کدام فرد زنده می‌ماند. با مثالهای مختلف، سعی کنید نتیجه‌های به دست آمده را کنار هم گذاشته و حدس بزنید، مثلاً اگر عدد افراد پنج نفر باشد، روشن است که مطابق دیاگرام زیر، نفر سوم زنده خواهد ماند. (A_1 ابتدا شلیک کرده است) و اگر عدد افراد ۷ نفر باشد، نفر هفتم و چنانچه عدد افراد ۱۰ نفر باشد، در آخر، نفر پنجم باقی می‌ماند (با رسم نمودار تحقیق کنید) و اگر عدد افراد ۱۳ نفر باشد، نفر هفتم زنده می‌ماند.



حدس استقرایی: اگر N نفر دور دایره‌ای ایستاده و به طریق پیش که گفته شد، به هم تیراندازی کنند، در آخر، نفر ردیف k ام زنده می‌ماند؛ به طوری که اگر عدد N در مبنای ۲ به صورت $N = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2$ نوشته شود، عدد k در مبنای ۲ به صورت $k = (a_n a_{n-1} \dots a_1)_2$ نوشته می‌شود؛ یعنی برای یافتن شماره شخصی که زنده می‌ماند، باید عدد افراد را به مبنای ۲ برد و، آخرین رقم سمت چپ را به راست انتقال داد. عدد حاصل، معرف شماره شخصی است که زنده می‌ماند. به عنوان مثال، وقتی $N = 17$ باشد، خواهیم داشت:

$$N = (10001)_2 \Rightarrow k = (00011)_2 = 3$$

یعنی نفر سوم زنده می‌ماند.

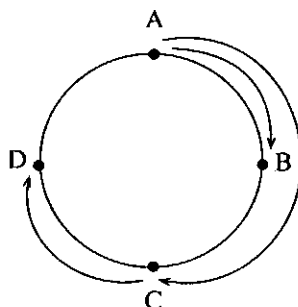
برای مطالعه بیشتر در این زمینه و اثبات رابطه قبل می‌توانید به مقاله‌ای که ترجمه‌ای است از خانم «شادی رستمی» به نام «مسائل بازگشتی»، مندرج در شماره اول «فصلنامه المپیاد»، نشریه مرکز المپیاد علمی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش پاییز ۱۳۷۳ رجوع کنید.

مثال ۳: در یک پادگان ۱۰۰۰۰۰ سرباز و افسر و درجه‌دار مشغول خدمت هستند. سن این افراد، همگی بین ۲۱ و ۴۱ سال می‌باشد. مجموع سنین این افراد، چه عددی می‌تواند باشد؟ روشن

بگویید آخرین فردی که زنده می‌ماند، چندمین نفر است؟ (نسبت به اولین نفری که تیراندازی کرده است.)

پاسخ: همان نفر اول

. بسادگی درمی‌یابیم که $2^{12} = 4096$ ، اینک فرض می‌کنیم که این افراد، دو نفر بودند (A و B) بدیهی است که اگر A اول شلیک کند، B می‌میرد و A زنده می‌ماند. اگر این افراد ۴ نفر باشند، (A و B و C و D) مطابق دیاگرام زیر، اول A شلیک کرده و B می‌میرد، سپس C شلیک کرده و D می‌میرد، و حالا نوبت A است که با شلیک خود، C را از بین برده و خود زنده می‌ماند.



اگر عدد این افراد، هشت نفر باشند نیز، ابتدا نفرات دوم، چهارم، ششم و هشتم می‌میرند، آن‌گاه، نفرات سوم و هفتم، و دست آخر، نفر پنجم توسط نفر اول به قتل می‌رسد (زیرا آخرین نوبت شلیک، متعلق به A می‌باشد) و به این ترتیب، باز هم A زنده می‌ماند.

حدس استقرایی: اگر 2^n نفر دور یک دایره ایستاده و به ترتیب فوق، به هم شلیک کنند، آخرین نفر که زنده می‌ماند، اولین نفری است که شلیک کرده است.

اثبات: برای $n=1$ قبلاً استدلال شده است. اگر حکم برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی اگر عدد افراد 2^k باشد، نفر اول زنده بماند، ثابت می‌کنیم برای $n=k+1$ هم درست است.

یعنی اگر عدد افراد 2^{k+1} نفر باشد، باز هم همان نفر اول زنده می‌ماند. استدلال ساده است، $2^{k+1} = 2 \times 2^k$ ، بنابراین وقتی نفر اول شلیک می‌کند، نیمی از افراد که در ردیفهای زوج ایستاده‌اند، همگی می‌میرند و عدد افراد به 2^k نفر کاهش می‌یابد و نوبت شلیک نیز به همان نفر اول می‌رسد. اینک 2^k نفر می‌مانند و طبق فرض استقرا، با شروع دوباره شلیک، همان نفر اول زنده خواهد ماند. مطابق حکم استقرایی فوق، اگر عدد افراد ۴۰۹۶ نفر باشد،

که باز هم یک دسته جواب قابل قبول به دست می‌آید و حکم استقرا ثابت می‌شود.

اینک در انتهای این فصل، تعدادی مثال برای کار فکری مستقل شما مطرح می‌شود. تلاش کنید با تعمق و تدبیر روی این مثالها، الگوی استقرایی آنها را کشف کرده و با استقرای ریاضی، آنها را حل کنید. مثالها، از آسان به مشکل ردیف شده‌اند.

تمرین ۱: تعداد 3^{100} سکه مختلف داریم که به لحاظ ظاهری، به طور کامل مشابه و یکسان می‌باشند و به هیچ وجه تمایزی ندارند و یکی از آنها، از بقیه سنگینتر می‌باشد. حداکثر، چند بار لازم است که از یک ترازوی دو کفه‌ای استفاده شود، تا سکه سنگینتر پیدا شود؟

تمرین ۲: در یک کشور، ۱۳۷۷ شهر با ۲۷۵۳ جاده یکطرفه، به یکدیگر مربوطند و بدون نقض قانون، حرکت در جاده‌های یکطرفه، می‌توان از شهری به شهر دیگر و از طریق این جاده‌ها حرکت کرد. ثابت کنید که همیشه جاده‌ای هست که با بستن آن، باز هم این امکان حفظ می‌شود.

تمرین ۳: در یک کشور، تعدادی شهر، ساخته شده و این شهرها هنوز با جاده‌های یکطرفه یا دوطرفه، به هم مربوط نشده‌اند. ثابت کنید که همیشه می‌توان آنها را با جاده‌های یکطرفه و دوطرفه، طوری به هم مربوط کرد که هر سه شهر دلخواه از این شهرها را که انتخاب کنیم، تعداد شهرهایی که از هر یک از آنها به طور مستقیم می‌توانیم به آنها مسافرت کنیم، سه عدد مختلف باشد.

تمرین ۴: ۲۰ نفر در یک مسابقه شطرنج شرکت کرده‌اند. در ضمن، هر دو نفر از آنها بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید، اگر بدانیم هیچ سه نفری وجود ندارند که با هم سه بار بازی کرده باشند، آن گاه تعداد دورهای بازی بیش از ۱۰,۰۰۰ دور نیست.

تمرین ۵: در کشوری، تعدادی شهر - که بیش از دو تاست - وجود دارد که قرار است با جاده‌های یکطرفه به هم مربوط شوند. ثابت کنید که می‌توان جاده‌ها را طوری کشید که از هر شهر، بتوان به هر شهر دیگر و حداکثر با دو مسافرت بین شهری، سفر کرد.

تمرین ۶: ثابت کنید، هر مربع دلخواه را می‌توان با برشهای مناسب، به قطعه‌هایی تبدیل کرد که با پهلوی هم قرار دادن این قطعه‌ها، ۱۳۷۷ مربع دیگر درست شود.

است که حداکثر این عدد، ۴۱۰,۰۰۰ می‌باشد و می‌نیمیم آن ۲۱۰,۰۰۰ است.

سؤال ما این است: کدام عدد طبیعی بین این دو عدد، نمی‌تواند عدد مجموع سنین این نظامیان باشد؟

پاسخ سؤال به نظر قدری مشکل می‌آید و در واقع، با استفاده از نمادگذاری جبری، به این مسأله تبدیل می‌شود: معادله سیاله خطی $41x_{21} + 22x_{22} + \dots + 21x_{21} = n$ به ازای کدام عدد طبیعی $210,000 \leq n \leq 410,000$ دارای جواب نمی‌باشد؟ ممکن است پاسخگویی به این سؤال، با شیوه‌های معمول، در نظریه اعداد دشوار باشد؛ ولی با استفاده از استقرای ریاضی، حل مسأله آسانتر می‌شود. در واقع، با استقرا ثابت می‌کنیم که این معادله، به ازای جميع مقادیر طبیعی n ، به قسمی که $n \geq 210,000$ دارای جواب می‌باشد.

به ازای $n = 210,000$ درستی گزاره بدیهی است؛ زیرا با اختیار کردن $x_1 = 10,000$ و $x_2 = x_3 = \dots = x_{21} = 0$ یک جواب قابل قبول به دست می‌آید. فرض می‌کنیم: حکم به ازای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + 1$ نیز صحیح است. اگر معادله $41x_{21} + 22x_{22} + \dots + 21x_{21} = k$ دارای یک دسته جواب باشد، آن گاه روشن است که:

$$21x_1 + 22x_2 + \dots + 41x_{21} + 1 = k + 1$$

حال اگر حتی یکی از x_i ها به ازای $1 \leq i \leq 20$ مخالف صفر باشد، آن گاه این عدد ۱ را به یکی از ضرایب عددی همان x_i اضافه نموده و از ضرایب آن، یک واحد کم می‌کنیم؛ یعنی:

$$1 + ax_i = a(x_i - 1) + (a + 1)$$

به عنوان مثال:

$$1 + 25x_7 = 26 + (x_7 - 1)25$$

مفهوم این کار، یعنی این که اگر حتی یک نظامی ۲۵ ساله در جمع باشد، آن یک سال اضافه را به او داده و با حذف او، یک نظامی ۲۶ ساله جایگزین می‌کنیم. با روش فوق ثابت می‌شود که به هر حال، یک دسته جواب قابل قبول برای معادله به ازای $n = k + 1$ وجود دارد. اگر هم همه ضرایب x_i از $i = 1$ تا $i = 20$ صفر باشد (یعنی همه پادگان از افراد ۴۱ ساله تشکیل شده باشد)، در آن صورت، آن یک سال اضافه را به یکی از افراد ۴۱ ساله اضافه کرده و او را حذف و دو نفر ۲۱ ساله اضافه می‌کنیم.

$$41x_{21} + 1 = (x_{21} - 1)41 + 2 \times 21$$

یعنی: