

معادله‌ی

سیاله

$$ax + by = c$$

(۱)

• سیمین اکبری زاده
دبیر ریاضی (۱۳۸۸)

«من به هیچ وجه تئوری اعداد را از علم معادلات سیاله تفکیک نمی‌کنم و این دو موضوع را یک و تنها یک شاخه‌ی آنالیز جبری می‌دانم. در واقع، قضیه‌ای در باب اعداد (صحیح) وجود ندارد که حل آن مربوط به حل یک یا چند معادله‌ی سیاله نشود.»

لژاندر

تعریف

معمولاً به هر معادله با یک یا چند متغیر که دامنه‌ی متغیرهای آن اعداد صحیح هستند، «معادله‌ی سیاله» گفته می‌شود. با توجه به آن که نخستین کتاب در این زمینه، کتاب «علم حساب» دیوفانتوس یا دیوفانت است، معادلات سیاله را معادلات دیوفانتوس یا دیوفانتی می‌خوانند.

ساده‌ترین معادله‌ی سیاله، معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی (درجه‌ی اول) $ax + by = c$ است که در آن a ، b و c اعداد صحیح هستند. منظور از حل این معادله، پیدا کردن مقادیر صحیح برای x و y به اسم x_0 و y_0 است که در معادله صدق کند؛ یعنی $ax_0 + by_0 = c$.

سؤالاتی که در این زمینه مطرح می‌شوند و در این مقاله پاسخ آن‌ها را می‌یابیم، عبارت‌اند از:

۱. تحت چه شرایطی می‌توان مطمئن بود که معادله‌ی سیاله‌ی داده شده جواب صحیح دارد؟

۲. در صورت وجود جواب، چگونه می توان جواب های صحیح یک معادله ی سیاله را یافت؟
 ۳. در صورت وجود جواب، چگونه می توان جواب های صحیح همراه با شرایط خاص یک معادله ی سیاله را یافت؟

ابتدا یک «لم» را بدون اثبات بیان می کنیم:

لم اقلیدس: اگر $a|bc$ و a و b نسبت به هم اول باشند، آن گاه: $a|c$.

سؤال ۱. آیا معادله ی سیاله ی $9x + 5y = 17$ دارای جواب صحیح است؟ $9x + 6y = 17$ چه طور؟
 پاسخ: معادله ی اول دارای جواب صحیح است. مثلاً با انتخاب $y = -2$ و $x = 3$ خواهیم داشت:
 $9(3) + 5(-2) = 17$ یعنی: $17 = 17$ و تساوی برقرار است. پس زوج مرتب $(3, -2)$ یک جواب صحیح برای این معادله است. ولی برای معادله ی دوم هرچه جست و جو کنیم، پاسخ صحیح نمی یابیم.
 قضیه ی زیر، شرط لازم و کافی برای وجود جواب صحیح یک معادله ی سیاله را بیان می کند.
 قضیه ی ۱: معادله ی سیاله ی $ax + by = c$ دارای جواب صحیح است، اگر و تنها اگر بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a و b ، عدد c را عاد کند.

مثال ۱. به کمک این قضیه می توان گفت: معادله ی $9x + 5y = 17$ دارای جواب صحیح است؛ زیرا:
 $1 = (9, 5)$ و $1|17$. ولی معادله ی $9x + 6y = 17$ دارای جواب صحیح نیست؛ زیرا: $3 = (9, 6)$ و $3 \nmid 17$.
 نتیجه ی قضیه: اگر در معادله ی سیاله ی $ax + by = c$ ، داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، آن گاه حتماً معادله جواب صحیح دارد؛ زیرا همواره: $1|c$.

مثال ۲. در این مثال می خواهیم ببینیم به ازای چه مقادیری از m ، معادله ی سیاله ی $2x + my = 7$ دارای جواب است ($m \in \mathbb{Z}$).

طبق قضیه، شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $17|(2, m)$. و چون تنها مقسوم علیه های طبیعی ۷، اعداد ۱ و ۷ هستند، لذا باید داشته باشیم: $(2, m) = 7$ یا $(2, m) = 1$.
 برای هیچ m ، تساوی $(2, m) = 7$ برقرار نیست، لذا تنها حالت مقبول $(2, m) = 1$ است. یعنی این معادله برای m هایی جواب دارد که نسبت به ۲ اول باشند؛ مانند: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$.

مثال ۳. در این مثال می خواهیم ببینیم، کوچک ترین عدد مثبت b ، طوری که معادله ی $1111x + 704y = 1500 + b$ جواب داشته باشد، چه عددی است.

چون: $11 = (1111, 704)$ ، لذا شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $11|1500 + b$.
 با توجه به آن که باقی مانده ی ۱۵۰۰ بر ۱۱، ۴ است، لذا باقی مانده ی ۱۵۰۷ بر ۱۱، صفر است. به عبارت دیگر: $11|1500 + 7$. بنابراین کوچک ترین عدد مثبت b ، ۷ است.

سؤال ۲. همه ی جواب های صحیح معادله ی $9x + 5y = 17$ را بیابید.
 پاسخ: جواب ها عبارت اند از:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=-7 \\ y=16 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=8 \\ y=-11 \end{cases} \text{ و } \dots$$

و به این ترتیب می توان بی شمار جواب صحیح برای معادله پیدا کرد. ولی شکل کلی جواب ها چگونه است و چگونه می توانیم جواب های عمومی معادله ی سیاله را به دست آوریم؟ به عبارت دیگر، با چه روشی می توان فرمولی برای x و y یافت که به کمک آن، کلیه ی جواب های صحیح معادله به دست آید؟ در ادامه ی مقاله پاسخ این سؤال را خواهید یافت.

سخنی برای گوش شنوا: با فرض آن که معادله ی سیاله ی $ax + by = c$ دارای جواب باشد، بهتر است پس از محاسبه ی بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a و b ، طرفین معادله را بر آن تقسیم کنیم و روی معادله ی جدید کار

کنیم. چون کار کردن با معادلاتی که ضرایب متغیر آن‌ها از لحاظ قدر مطلق کوچک‌ترند، طبعاً ساده‌تر است.

الف) روش‌های حل معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی

۱. روش اول برای یافتن جواب عمومی

در این روش از مفهوم بخش‌پذیری و لم اقلیدس استفاده می‌شود.

مثال ۴. در این مثال، تمامی جواب‌های صحیح معادله‌ی $13x + 5y = 130$ را به دست می‌آوریم.

حل: چون $5y$ و $13x$ هر دو بر ۵ بخش‌پذیر هستند، لذا شرط برقراری تساوی آن است که $7x$ نیز مضرب ۵

باشد؛ یعنی باید داشته باشیم: $5 \mid 7x$. و با توجه به آن که $1 = (7, 5)$ ، لذا باید: $5 \mid x$. یعنی شرط برقراری تساوی

آن است که x مضرب صحیح ۵ باشد؛ یا: $x = 5k \ (k \in \mathbb{Z})$.

با جای‌گذاری در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $7(5k) + 5y = 130$ و با تقسیم طرفین تساوی بر ۵ معادله‌ی

$7k + y = 26$ به دست می‌آید. لذا: $y = 26 - 7k \ (k \in \mathbb{Z})$.

پس همه‌ی جواب‌های صحیح این معادله به کمک $\begin{cases} x = 5k \\ y = 26 - 7k \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ به دست خواهند آمد.

با انتخاب هر عدد صحیح دل‌خواه برای k ، می‌توان یک جواب معادله را یافت. تعدادی از جواب‌ها از این

قرارند:

k	...	-2	-1	0	1	2	...
x		-10	-5	0	5	10	
y		40	33	26	19	12	

توجه: این روش هنگامی مناسب است که عدد ثابت معادله و ضریب یکی از مجهولات، مقسوم علیه مشترک داشته باشند، مثل e . در این صورت مجهول دیگر نیز باید مضرب e باشد. لذا به جای مجهول دیگر ek قرار می‌دهیم. به این ترتیب، یکی از مجهولات بر حسب k به دست می‌آید. حاصل را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و با تقسیم طرفین تساوی بر e ، مجهول دیگر نیز بر حسب k به دست خواهد آمد.

۲. روش دوم برای یافتن جواب عمومی

در این روش، با فرض آن که معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای جواب باشد و $(a, b) = d$ و x و y یک جواب

معادله باشد (جواب خصوصی)، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله به این صورت خواهد بود:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \quad (\text{ضرب } y) \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \quad (\text{ضرب } x) \end{cases} \quad \text{که در آن: } k \in \mathbb{Z} \text{ یا به طور معادل:} \quad \text{فرمول (۱)}$$

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{b}{d}k \\ y = y_0 + \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

فرمول (۲)

مثال ۵. در این مثال: به کمک روش دوم جواب‌های صحیح معادله‌ی $9x + 5y = 17$ را به دست می‌آوریم.

$$5 = \text{ضرب } y = b; \quad 9 = \text{ضرب } x = a; \quad d = 1 = (9, 5)$$

و در ضمن، یکی از جواب‌های معادله $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ است. چون این جواب‌ها در معادله صدق می‌کنند،

آن‌ها را جواب خصوصی می‌نامیم و قرار می‌دهیم: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$. حال با جای‌گذاری در فرمول (۱)،

جواب‌های عمومی معادله به شکل $\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -2 - 9k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ به دست می‌آیند و با انتخاب هر عدد صحیح

دل‌خواه برای k ، می‌توان یک جواب معادله را یافت. مثلاً با انتخاب $k = 0, -1, -2, -3$ ، به ترتیب همان جواب‌های ذکر شده در سؤال ۲ به دست می‌آیند و این معادله بی‌شمار جواب صحیح دارد.

نکته: اگر از فرمول (۲) استفاده کنیم، جواب‌های عمومی معادله به شکل $\begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = -2 + 9k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

به دست می‌آیند و یا حتی اگر در شروع کار، جواب خصوصی دیگری را به دست آوریم، مثلاً: $\begin{cases} x_0 = 8 \\ y_0 = -11 \end{cases}$

در این صورت جواب‌های عمومی معادله با فرمول (۲) به شکل $\begin{cases} x = 8 - 5k \\ y = -11 + 9k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ به دست

می‌آیند. در این مثال، سه شکل به ظاهر متفاوت برای جواب عمومی این معادله‌ی سیاله پیدا کردیم. ولی مجموعه‌ی مقادیری که برای (x, y) از شکل‌های متفاوت حاصل می‌شوند، یکی است. به عبارت دیگر، هر جواب خاص که از یک فرم جواب عمومی به دست آید، از فرم‌های دیگر نیز حاصل می‌شود؛ البته با

انتخاب عدد مناسبی برای پارامتر k . مثلاً جواب $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ از شکل اول جواب عمومی این مثال، با انتخاب

$k = 0$ به دست می‌آید و همین جواب از شکل دوم با انتخاب $k = 0$ و از شکل سوم با انتخاب $k = 1$ به دست می‌آید. با تغییر مناسبی در پارامتر سه شکل به ظاهر متفاوت جواب، می‌توان آن‌ها را مشابه کرد. مثلاً در این مثال، اگر در شکل دوم جواب به جای k ، $-k$ قرار دهیم و در شکل سوم جواب به جای k ، $1 - k$ قرار دهیم، شکل‌های به دست آمده مانند شکل اول خواهند شد.

در ضمن در این مثال:

$$\text{شکل اول جواب عمومی} \Rightarrow x + y = 1 - 4k$$

$$\text{شکل دوم جواب عمومی} \Rightarrow x + y = 1 - 4k$$

$$\text{شکل سوم جواب عمومی} \Rightarrow x + y = 3 + 4k$$

و با انتخاب هر جواب خصوصی دل‌خواه و هر یک از فرمول‌های (۱) و (۲) نیز، ضریب پارامتر k در $x + y$ یا 4 است یا -4 و این موضوع کلیت دارد. لذا طی این مثال به نکته‌ی زیر پی بردیم:

نکته: ظاهراً ممکن است جواب‌های عمومی به دست آمده با روش‌های مختلف، متفاوت باشند، ولی:

اولاً اگر در یک جواب عمومی به جای پارامتر k ، پارامتر دیگری بر حسب k قرار دهیم، ظاهر جواب‌های عمومی مشابه خواهد شد.

و ثانیاً ضریب پارامتر k در $x + y$ یا مثل هم است و یا قرینه.

توجه: روش جواب خصوصی روش ساده‌ای است، ولی هنگامی مناسب است که بتوانیم جواب خصوصی x_0 و y_0 را راحت پیدا کنیم. لذا پیدا کردن حتی یک جواب برای معادله‌ی سیاله غنیمت است تا بتوانیم از آن‌ها به عنوان جواب خصوصی استفاده کنیم. اما چگونه؟

ادامه دارد...