

رابطه‌ی Sها در معادله‌ی درجه دوم

احمد قندهاری

فرض می‌کنیم:

$$S_1 = x' + x''$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3$$

$$\vdots$$

$$S_n = x'^n + x''^n$$

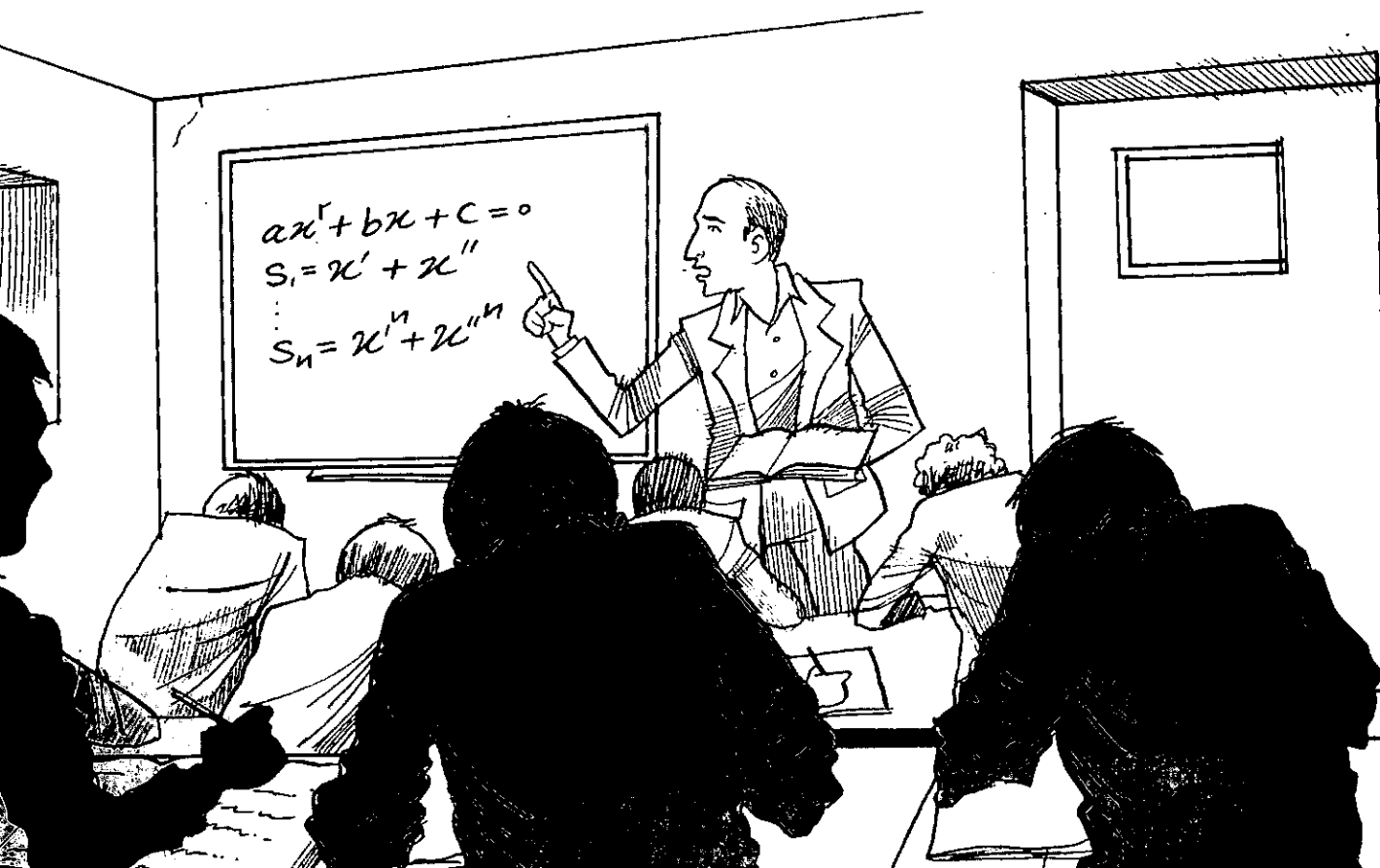
دو طرف معادله‌ی درجه‌ی دوم را در x^{n-2} ضرب می‌کنیم ($n \in \mathbb{N}$):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0$$

اشاره:

در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل آن، چند نکته‌ی مفید نیز مطرح شد. در قسمت دوم، تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و بحث در تعداد و علامت ریشه‌ها آمد. در قسمت سوم، روابط بین ضریب‌ها و ریشه‌ها و تشکیل معادله در حالت‌های گوناگون بررسی شد و اینک قسمت چهارم.



باشند، آن گاه حاصل $K = (\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3})$ را بیابید.

حل: $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$

$$K = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + \beta + \beta^2 + \beta^3$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha + \beta)$$

$$K = (S^2 - 2PS) + (S^1 - 2P) + (S)$$

داریم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$K = (2^2 - 2 \cdot 1) + (2 - 2) + 2 = 2$$

مسئله ۲: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، با فرض $\alpha > \beta$ حاصل $K = 5\alpha^2 + 3\beta^2 - 5\sqrt{17}$ را بیابید.

حل:

$$K = 5\alpha^2 + 3\beta^2 - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4\alpha^2 + \alpha^2 + 3\beta^2 - \beta^2 - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(S^2 - 2P) + \frac{\sqrt{\Delta}}{a}(S) - 5\sqrt{17}$$

داریم:

$$\begin{cases} S = 5 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$K = 4(25 - 4) + \frac{\sqrt{25 - 8}}{1}(5) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(21) + 5\sqrt{17} - 5\sqrt{17} \Rightarrow K = 84$$

مسئله ۳: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، آن گاه حاصل عبارت $K = \alpha^2 + 3\beta^2 + \beta$ را بیابید.

حل: $x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x + 1$

$$x = \beta \Rightarrow \beta^2 = 3\beta + 1 \quad (1)$$

$$K = \alpha^2 + 3\beta^2 + \beta = \alpha^2 + \beta(3\beta + 1)$$

$$K = \alpha^2 + \beta(\beta^2) = \alpha^2 + \beta^3$$

داریم:

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = -1 \end{cases}$$

حال در این معادله، یک بار به جای x ، x' و یک بار به جای x'' را قرار می دهیم:

$$\begin{cases} ax'^n + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0 \\ ax''^n + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0 \end{cases}$$

این دو معادله را نظیر به نظیر با هم جمع می کنیم:

$$a(x'^n + x''^n) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) = 0$$

با مفروضات اولیه می توان نوشت:

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$$

که به آن رابطه ی S ها در معادله ی درجه دوم می گویم.

مسئله ۱: در معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ مطلوب است

$$S_0 = x'^5 + x''^5$$

حل: رابطه ی S ها را برای این معادله می نویسم:

$$S_n - 2S_{n-1} - S_{n-2} = 0$$

می دانیم:

$$\begin{cases} S_1 = 2 \\ S_2 = x'^2 + x''^2 = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$n = 2 \Rightarrow S_2 - 2S_1 - S_0 = 0$$

$$S_2 - 2(2) - S_0 = 0 \Rightarrow S_0 = 6$$

$$n = 3 \Rightarrow S_3 - 2S_2 - S_1 = 0$$

$$S_3 - 2(2) - 2 = 0 \Rightarrow S_3 = 14$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 - 2S_3 - S_2 = 0$$

$$S_4 - 2(14) - 2 = 0 \Rightarrow S_4 = 34$$

$$n = 5 \Rightarrow S_5 - 2S_4 - S_3 = 0$$

$$S_5 - 2(34) - 14 = 0 \Rightarrow S_5 = 82$$

مسئله ۲: در معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ اگر $S_{1..} = K$ آن گاه $S_{3..}$ را بیابید.

حل: $S_{1..} = K$

$$x'^{100} + x''^{100} = K$$

فرض می کنیم: $a = x'^{100}$ و $b = x''^{100}$ پس: $a + b = K$ دو طرف را به توان ۳ می رسانیم:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = K^3$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(K) = K^3$$

$$\underbrace{x'^{300} + x''^{300}}_{S_{3..}} + 3(x'^{100})(x''^{100})(K) = K^3$$

$$S_{3..} + 3K(x'x'')^{100} = K^3$$

$$S_{3..} + 3K(-1)^{100} = K^3$$

$$S_{3..} + 3K = K^3 \Rightarrow S_{3..} = K^3 - 3K$$

چند مساله درباره ی معادله های درجه دوم

مسئله ۱: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$



$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = 4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow 4 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$K = (\cos 2\alpha)(1) = \cos 2\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

معادلات تبدیل پذیر به معادله‌ی درجه دوم

الف) هر معادله‌ای که به صورت $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ باشد، با فرض $y = x^n$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شود و قابل حل است.

مثال ۱: معادله‌ی $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $y = x^4$ پس:

مجموع ضرایب‌های این معادله صفر است.

$$16y^2 - 17y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال ۲: معادله‌ی $x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} - 2 = 0 \quad x > 0$$

$$y = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y^2 = x^{\frac{1}{2}} \quad x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$y^2 - 4y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2}}{1} = 2 \pm \sqrt{6}$$

$$y > 0 \Rightarrow y = 2 + \sqrt{6}$$

$$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x} = 2 + \sqrt{6} \Rightarrow x = (2 + \sqrt{6})^4$$

ب) معادلاتی که به صورت $(P(x) + m)(P(x) + n) = K$ باشند؛ با فرض $P(x) = y$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

مثال: معادله‌ی $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3) = 8$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $y = x^2 + x$ پس:

$$K = S^2 - 3PS = 27 - 3(3)(-1) = 27 + 9 = 36$$

مسئله‌ی ۴: اگر a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$

باشد، آن‌گاه حاصل $K = a^4 + \frac{1}{a^4}$ را بیابید.

حل: a ریشه‌ی معادله است، پس در معادله به جای x ، a قرار می‌دهیم و دو طرف را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

$$a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47 \Rightarrow K = 47$$

مسئله‌ی ۵: اگر a و b و c و d اعداد حقیقی مخالف صفر باشند

و c و d ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ و a و b ریشه‌های

معادله‌ی $x^2 + cx + d = 0$ باشند، آن‌گاه مقدار عددی

$(a+b+c+d)$ را بیابید.

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \begin{cases} x' = c \\ x'' = d \end{cases} \quad \text{حل:}$$

$$\begin{cases} x' + x'' = -a \Rightarrow c + d = -a \Rightarrow a + c + d = 0 & (1) \\ x' \cdot x'' = b \Rightarrow c \cdot d = b & (2) \end{cases}$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad \begin{cases} x' = a \\ x'' = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + x'' = -c \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a + b + c = 0 & (3) \\ x' \cdot x'' = d \Rightarrow ab = d & (4) \end{cases}$$

$$(1) \text{ رابطه‌ی } (3) \Rightarrow a + c + d = a + b + c \Rightarrow \boxed{b = d}$$

$$(2) \text{ رابطه: } c \cdot d = b \text{ و } b = d \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$(4) \text{ رابطه: } ab = d \text{ و } b = d \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$(1) \text{ رابطه: } a + c + d = 0 \Rightarrow 1 + 1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -2}, \quad \boxed{b = -2}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 1 - 2 + 1 - 2 = -2$$

مسئله‌ی ۶: اگر $\cot \alpha$ و $\tan \alpha$ ریشه‌های معادله‌ی

$x^2 - 4x + m - 2 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$k = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{cases} x' = \tan \alpha \\ x'' = \cot \alpha \end{cases}$$

حل:

بنابر این داریم:

$$(2 - \sqrt{3})^{\sin x} + \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^{\sin x}} = 2$$

فرض می شود: $y = (2 - \sqrt{3})^{\sin x}$ در نتیجه:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 + 1 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$(2 - \sqrt{3})^{\sin x} = y$$

$$(2 - \sqrt{3})^{\sin x} = 1 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\sin x} = (2 - \sqrt{3})^0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3) = 8 \Rightarrow (y - 5)(y - 3) = 8 \Rightarrow$$

$$y^2 - 8y + 15 = 8 \Rightarrow y^2 - 8y + 7 = 0$$

مجموع ضریب ها صفر است

$$\Rightarrow y = 1, y = 7$$

$$\text{الف) } y = 1 \Rightarrow x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ب) } y = 7 \Rightarrow x^2 + x = 7 \Rightarrow x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

ج) معادلاتی که به صورت $P(x) + \frac{m}{P(x)} = K$ باشند، با

فرض $y = P(x)$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می شوند.

مثال ۱. معادله‌ی $\frac{(x^2 + x + 1)^2 + 4}{x^2 + x + 1} = 6$ را حل کنید.

حل: $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta < 0$ و $a > 0$ کسر را تفکیک می کنیم:

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{4}{x^2 + x + 1} = 6$$

$$x^2 + x + 1 + \frac{4}{x^2 + x + 1} = 6$$

فرض می کنیم: $y = x^2 + x + 1$

$$y + \frac{4}{y} = 6 \Rightarrow y^2 + 4 = 6y \Rightarrow y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{1} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{الف) } y = 3 + \sqrt{5}$$

$$x^2 + x + 1 = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + x - (2 + \sqrt{5}) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2+\sqrt{5})}}{2}$$

$$\text{ب) } y = 3 - \sqrt{5}$$

$$x^2 + x + 1 = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + x - (2 - \sqrt{5}) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2-\sqrt{5})}}{2}$$

مثال ۲. معادله‌ی $(2 - \sqrt{3})^{\sin x} + (2 + \sqrt{3})^{\sin x} = 2$ را حل کنید.

حل:

$$2 + \sqrt{3} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4 - 3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

معمای فکری و منطقی



۱. در میان صد نفر متقاضی برای شغل فنی خاصی،

مشخص شد که ده نفر هیچ گاه دوره‌ی شیمی یا فیزیک را نگذرانده‌اند. هفتاد و پنج نفر دست کم یک دوره در شیمی گذرانده‌اند. هشتاد و سه نفر هم دست کم یک دوره در فیزیک گذرانده‌اند.

چند نفر از متقاضیان، هم در شیمی هم در فیزیک،

کاری انجام داده‌اند؟

دو نفر از متقاضیان

۲. B، H، J، و T روزی برای سرگرمی به مسابقه‌ی

طناب کشی پرداختند. گرچه به سختی، اما H توانست B

و J را با هم بکشد و H و B با هم توانستند T و J را

نگهدارند و هیچ جفتی نتوانست دیگری را حرکت دهد.

اما اگر J و B جایشان عوض می شد، آن وقت T و B مسابقه

را نسبتاً به آسانی می بردند.

از این چهار، کدام یک قوی ترین است و به ترتیب

نفرات بعدی کدامند؟

تغییرات: B، H، J، و T

دو نفر از متقاضیان