

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم



در قسمت اول این مقاله، حالت‌های ناقص معادله درجه دوم بررسی شد و فرمول‌های حل معادله اثبات شد و چند نکته مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شد.

در شماره‌ی قبل تجزیه‌ی معادله‌ی درجه دوم به حاصل ضرب عوامل اول، تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم و بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم بیان شد. اینک در ادامه، روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌های درجه دوم را در پی می‌آوریم.



● احمدهای

$$9. |x' - x''| = |(x' - x'')(x'^2 + x''^2 + x'x'')|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} (S^2 - 2P + P) \right|$$

$$\Rightarrow |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} |S^2 - P|$$

$$10. x'^4 + x''^4 = (x'^2 + x''^2)^2 - 2x'^2 x''^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$11. \frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} = \frac{x''^4 + x'^4}{x'^4 x''^4} = \frac{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2}{P^4}$$

$$12. |x'^4 - x''^4| = |(x'^2 - x''^2)(x'^2 + x''^2)|$$

$$= (x'^2 + x''^2) |x'^2 - x''^2| = (S^2 - 2P) \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \cdot |S|$$

فرض می‌کنیم: $x' > 0$, $x'' > 0$ در نتیجه داریم:

$$13. \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{(\sqrt{x'} + \sqrt{x''})^2} = \sqrt{x' + x'' + 2\sqrt{x'x''}}$$

$$= \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$14. |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{(\sqrt{x'} - \sqrt{x''})^2} = \sqrt{x' + x'' - 2\sqrt{x'x''}}$$

$$= \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها، در معادله‌ی درجه‌ی دوم

$ax^2 + bx + c = 0$ با فرض این‌که x' و x'' ریشه‌های این معادله باشند رابطه‌های بین a , b , c و x' و x'' از این قرارند:

$$1. x' + x'' = -\frac{b}{a} = S$$

$$2. x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = P$$

$$3. |x' - x''| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$4. x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$$

$$5. \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{x''^2 + x'^2}{x'^2 x''^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

$$6. |x'^2 - x''^2| = |(x' - x'')(x' + x'')| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times S \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times |S|$$

$$7. x'^2 + x''^2 = (x' + x'')(x' + x''^2 - x'x'') = S(S^2 - 2P - P) = S(S^2 - 3P)$$

$$\Rightarrow x'^2 + x''^2 = S^2 - 3PS$$

$$8. \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{x''^2 + x'^2}{x'^2 x''^2} = \frac{S^2 - 3PS}{P^2}$$

$$۱۲. |x'^2 - x''^2| = (S^2 - 2P) \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \cdot |S| = (V) \frac{\sqrt{\Delta}}{1} (3) = 21\sqrt{5}$$

$$۱۳. \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S+2\sqrt{P}} = \sqrt{3+2\sqrt{1}} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$$

$$۱۴. |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S-2\sqrt{P}} = \sqrt{3-2\sqrt{1}} = \sqrt{3-2} = 1$$

$$۱۵. \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{S}{\sqrt{P}} = \frac{3}{\sqrt{1}} = \frac{3}{1} = 3$$

مسئله ۲. اگر در معادله $x^2 - 5x + (m-2) = 0$ ، x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^2 + x''^2 = 65$ ، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$\text{حل: } S = 5 \text{ و } P = m - 2 \quad x'^2 + x''^2 = 65$$

$$S^2 - 2PS = 65$$

$$(5)^2 - 2(m-2)(5) = 65$$

$$۱۲۵ - ۱۵(m-2) = 65$$

$$60 = 15(m-2) \Rightarrow 4 = m-2 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

مسئله ۳. در معادله $x^2 + (m-2)x + (k+1) = 0$ ، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^2 - \frac{1}{x'^4} + x''^2 - \frac{1}{x''^4} = 0$ ، آن‌گاه مقدار k و m را بیابید (x' و x'' مخالف صفرند).

$$\text{حل: } x'^2 - \frac{1}{x'^4} + x''^2 - \frac{1}{x''^4} = 0$$

$$\Rightarrow x'^2 + x''^2 = \frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} \Rightarrow x'^2 + x''^2 = \frac{x'^4 + x''^4}{x'^4 \cdot x''^4}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x'^4 \cdot x''^4} \Rightarrow (x'x'')^4 = 1 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^4 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \pm 1 \Rightarrow \frac{k+1}{1} = \pm 1 \Rightarrow k = -1 \pm 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 0 \text{ یا } -2}$$

$$۱۵. \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{x' + x''}{\sqrt{x'x''}} = \frac{S}{\sqrt{P}}$$

مسئله ۱. در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد ۱۵ گانه‌ی روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را محاسبه کنید.

حل: در این معادله داریم: $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ و $\frac{c}{a} = 1 > 0$ و $-\frac{b}{a} = 3 > 0$ پس دوریشه‌ی معادله، یعنی x' و x'' مثبت هستند.

$$a = 1 \text{ و } b = -3 \text{ و } c = 1$$

$$S = -\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow S = 3$$

$$P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow P = 1$$

$$۱. x' + x'' = S = 3$$

$$۲. x' \cdot x'' = P = 1$$

$$۳. |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$۴. x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P = 9 - 2 = 7$$

$$۵. \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{7}{1} = 7$$

$$۶. |x'^2 - x''^2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \cdot |S| = \frac{\sqrt{5}}{1} \times 3 = 3\sqrt{5}$$

$$۷. x'^3 + x''^3 = S^3 - 3PS = (3)^3 - 3(1)(3) = 27 - 9 = 18$$

$$۸. \frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3} = \frac{18}{1} = 18$$

$$۹. |x'^3 - x''^3| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \cdot |S^3 - P| = \frac{\sqrt{5}}{1} |9 - 1| = 8\sqrt{5}$$

$$۱۰. x'^4 + x''^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = (9 - 2)^2 - 2 = 49$$

$$۱۱. \frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} = \frac{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2}{P^4} = \frac{49}{1} = 49$$

۲. تشکیل معادله‌ای که یک ریشه‌ی آن معلوم است

ریشه‌ی معلوم را مساوی x قرار می‌دهیم. سپس دو طرف این رابطه را به توان درجه‌ی معادله‌ی موردنظر می‌رسانیم.
مثال: معادله‌ی درجه دوم با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt{2} - 3$ باشد.

روش اول: $x = 3 - \sqrt{2}$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم: $x - 3 = -\sqrt{2}$

$$x^2 - 6x + 9 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

روش دوم: اگر بخواهیم معادله‌ی درجه دوم با ضرایب گویا بسازیم که یک ریشه‌ی آن $\sqrt{2} - 3$ باشد، باید ریشه‌ی دیگر $3 + \sqrt{2}$ باشد تا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اعداد گویا باشند. پس:

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

توجه: روش اول کاراتر است.

مثال ۲: معادله‌ی درجه سومی با ضرایب گویا بسازید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt[3]{5} - 2$ باشد.

حل: $x = \sqrt[3]{5} - 2$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم: $x + 2 = \sqrt[3]{5}$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 5 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 3 = 0$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم جدید از روی معادله‌ی مفروض تحت شرایط خاص

ریشه معادله‌ی مفروض را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم. سپس خواسته‌ی مسأله را به یک رابطه‌ی ریاضی بین x و y تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه x را از آن رابطه محاسبه می‌کنیم و در معادله‌ی مفروض قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که در انتهای کار، یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

مسأله‌ی ۱. معادله‌ی $x^2 - 5x + 3 = 0$ مفروض است.

معادله‌ی درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که:

الف) ریشه‌های آن از ثلث ریشه‌های معادله‌ی مفروض

و ب) واحد کم‌تر باشد.

$$x'^2 + x''^2 = 47 \Rightarrow S^2 - 2P = 47 \begin{cases} S = -(m-2) \\ P = k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 - 2(k+1) = 47$$

$$\text{الف) } k = 0; (m-2)^2 - 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 49$$

$$\Rightarrow m-2 = \pm 7 \Rightarrow m = 2 \pm 7 \Rightarrow \boxed{m = 9 \text{ یا } -5}$$

$$\text{ب) } k = -2; (m-2)^2 + 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 45$$

$$\Rightarrow m-2 = \pm \sqrt{45} \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{45} \Rightarrow \boxed{m = 2 \pm 3\sqrt{5}}$$

تشکیل معادله

۱. تشکیل معادله با حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد

اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل ضرب همان دو عدد یعنی P ، معلوم باشند و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم، معادله‌ی درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش آن دو عدد باشند.

معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر می‌گیریم و دو طرف آن را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{می‌دانیم:} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ ، مقادیر عددی S و P را قرار می‌دهیم و آن‌گاه معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم، از حل معادله آن دو عدد به دست می‌آیند.

مثال: دو عدد چنان بیابید که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۲ باشد.

$$\text{حل: } x^2 - Sx + P = 0; \quad S = 4 \text{ و } P = 2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{1} = 2 \pm \sqrt{2}$$

پس آن دو عدد $2 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$ هستند.

در معادله‌ی مفروض به جای x ، $\sqrt[3]{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^3 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0$$

$$\sqrt[3]{y^3} - 5\sqrt[3]{y} = -3 \quad \text{روش اول:}$$

$$a = \sqrt[3]{y^3} \text{ و } b = 5\sqrt[3]{y}$$

$$a - b = -3 \quad \text{دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:}$$

$$a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = -27$$

$$y^3 - 125y - 3(\sqrt[3]{y^3})(5\sqrt[3]{y})(-3) = -27$$

$$y^3 - 125y + 45y = -27 \Rightarrow y^3 - 80y + 27 = 0$$

روش دوم: استفاده از اتحاد اولر

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \text{یا} & \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ a = b = c \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{y^3} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0$$

$$a = \sqrt[3]{y^3}, b = -5\sqrt[3]{y}, c = 3$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\sqrt[3]{y^3} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0 \Rightarrow y^3 - 125y + 27 = 3(\sqrt[3]{y^3})(-5\sqrt[3]{y})(3) \Rightarrow$$

$$y^3 - 125y + 27 = -45y \Rightarrow y^3 - 80y + 27 = 0$$

مسئله‌ی ۲. معادله‌ی $x^3 - 3x - 1 = 0$ مفروض است.

اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $4 - 3x'' + 2x'$ و $4 - 3x' + 2x''$ باشند.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم:

$$y = 2x' + 3x'' - 4 \Rightarrow y = 2x' + 2x'' + x'' - 4 \Rightarrow$$

$$y = 2(x' + x'') + x'' - 4 \Rightarrow y = 2(3) + x'' - 4 \Rightarrow$$

$$y = 6 + x'' - 4 \Rightarrow x'' = y - 2 \text{ و } x = y - 2$$

در معادله‌ی مفروض به جای x ، $y - 2$ را قرار

می‌دهیم.

(ب) ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی مفروض ۳ واحد بیش‌تر باشد.

(ج) ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

(د) ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

حل:

(الف) $\begin{cases} x = \text{ریشه‌ی معادله‌ی مفروض} \\ y = \text{ریشه‌ی معادله‌ی جدید} \end{cases}$

$$y = \frac{x}{3} - 2 \Rightarrow \frac{x}{3} = y + 2 \Rightarrow x = 3y + 6$$

در معادله‌ی مفروض به جای x ، $3y + 6$ را قرار می‌دهیم:

$$x^3 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow (3y + 6)^3 - 5(3y + 6) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 9y^3 + 36y^2 + 36 - 15y - 30 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 9y^3 + 21y + 9 = 0 \Rightarrow 3y^3 + 7y + 3 = 0$$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \quad \text{(ب)}$$

در معادله‌ی مفروض به جای x ، $\frac{y - 3}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^3 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \frac{(y - 3)^3}{8} - \frac{5(y - 3)}{2} + 3 = 0$$

$$(y - 3)^3 - 10(y - 3) + 12 = 0 \Rightarrow y^3 - 6y + 9 - 10y + 30 + 12 = 0 \Rightarrow y^3 - 16y + 51 = 0$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \quad \text{(ج)}$$

در معادله‌ی درجه دوم مفروض به جای x ، $\pm\sqrt{y}$ را قرار

می‌دهیم:

$$x^3 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{y})^3 - 5(\pm\sqrt{y}) + 3 = 0$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$$y - 5(\pm\sqrt{y}) + 3 = 0 \Rightarrow y + 3 = 5(\pm\sqrt{y})$$

$$y^2 + 6y + 9 = 25y \Rightarrow y^2 - 19y + 9 = 0$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \quad \text{(د)}$$