



میر شهرام صدر

معادله های گنگ

الفاظ

در این شماره، درباره ی معادله های گنگ بحث خواهیم کرد و حل
معادله های گنگ را در شماره ی آینده ی مجله ملاحظه خواهید کرد.

عبارت گنگ

اگر عبارت جبری گویا نباشد، «عبارت جبری گنگ» نامیده می شود. در چنین عبارت هایی، رادیکال های مجهول دار وجود دارند؛ مانند:

$$2\sqrt{x+2}-1; x^2-3x\sqrt{x^2-4}; \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}+2;$$

$$3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x^2-2x}$$

تذکر. عبارت جبری $(2+\sqrt{3})x^2-\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}$ گنگ

نیست، بلکه چند جمله ای درجه دوم است و ضریب های آن اعداد گنگ هستند.

دامنه ی عبارت های جبری گنگ

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه ی زوج موجود باشد، این رادیکال وقتی تعریف شده است که عبارت

زیر آن بزرگ تر یا مساوی صفر باشد. یعنی $\sqrt{f(x)}$ وقتی تعریف شده است که $f(x) \geq 0$.

تذکر. عبارت $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ وقتی تعریف شده است که

$g(x) > 0$ ؛ چون کسر وقتی تعریف شده است که مخرج آن صفر نباشد.

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه ی فرد موجود باشد، چون زیر رادیکال با فرجه ی فرد، هر عددی می تواند قرار گیرد، پس در این حالت $D = \mathbb{R}$.

مثال ۱. دامنه ی عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $3x + \sqrt{x-2}$

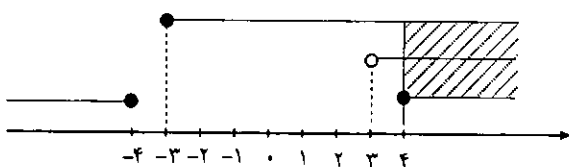
ب) $2\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-2x}$

ج) $\sqrt{3-x} - \sqrt{7+x} + \sqrt{16+2x}$

د) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3}$



$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases} \quad (د) \Rightarrow D = [4, +\infty)$$



حل معادله‌ی شامل عبارت گنگ

معادله‌هایی را که در آن‌ها عبارت‌های گنگ وجود داشته باشند، معادله‌های گنگ می‌نامیم. مراحل حل این معادله‌ها عبارتند از:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب (دامنه‌ی متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گنگ معادله است، به دست می‌آوریم و آن را D می‌نامیم. در صورتی که $D \neq \emptyset$ ، مراحل بعدی را انجام می‌دهیم و در غیر این صورت، معادله‌ی گنگ جواب ندارد.

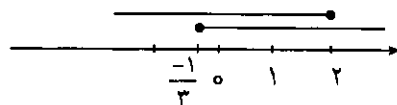
مرحله‌ی دوم: اگر معادله شامل یک رادیکال باشد، آن رادیکال را یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

اگر معادله بیش از یک رادیکال داشته باشد، یک رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها و رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی آن رادیکال می‌رسانیم و پس از ساده کردن، این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر در معادله عبارت

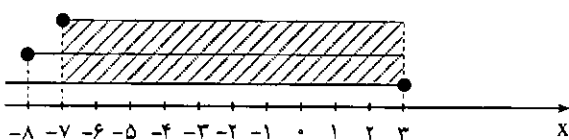


$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty) \quad (\text{حل: الف})$$

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 2x \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow D = [-\frac{1}{3}, 2] \quad (\text{ب})$$



$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3 \\ 7 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \\ 16 + 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -16 \Rightarrow x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow D = [-7, 3] \quad (\text{ج})$$



گنگ موجود نباشد.

$$\sqrt{x} + 5 = -\sqrt{7x+1} \quad (و)$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{x-5}} \quad (ز)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2 \quad (ح)$$

$$\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt[3]{4} \quad (ط)$$

$$\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2 \quad (ی)$$

مرحله ی سوم: از مرحله ی دوم به یک معادله می رسیم که پس از حل آن، ریشه هایی به دست می آیند. این ریشه ها در صورتی قابل قبول هستند که هم در دامنه ی جواب معادله ی گنگ و هم در خود معادله ی گنگ صدق کنند.

مثال ۲. نشان دهید معادله ی $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} + 3 = x$ ریشه ندارد.

حل:

مرحله ی اول: دامنه ی جواب معادله را می یابیم.

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D = \emptyset$$



چون $D = \emptyset$ ، پس معادله ریشه ندارد.

مثال ۳. ابتدا دامنه ی متغیر هر یک از معادله های زیر را تعیین کنید و سپس آن ها را حل کنید.

$$3 + \sqrt{x-7} = 8 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{x} - x = -20 \quad (\text{ب})$$

$$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3} = 0 \quad (\text{د})$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5 \quad (\text{هـ})$$

$$3 + \sqrt{x-7} = 8 \quad (\text{حل: الف})$$

مرحله ی اول: دامنه ی جواب معادله را می یابیم:

$$x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow D = [7, +\infty]$$

مرحله ی دوم: رادیکال را یک طرف معادله قرار می دهیم و بقیه ی مقادیر را به طرف دیگر معادله می بریم:

$$3 + \sqrt{x-7} = 8 \Rightarrow \sqrt{x-7} = 5$$

اکنون دو طرف معادله را به توان فرجه ی رادیکال، یعنی عدد ۲ می رسانیم:

$$(\sqrt{x-7})^2 = 5^2 \Rightarrow x-7 = 25 \Rightarrow x = 32 \in D$$

مرحله ی سوم: $x=32$ را در معادله قرار می دهیم:

$$x = 32 \Rightarrow 3 + \sqrt{32-7} = 8 \Rightarrow 3 + \sqrt{25} = 8 \Rightarrow 3 + 5 = 8$$

درست است.

چون ریشه ی به دست آمده یعنی $x=32$ هم در دامنه ی معادله و هم در خود معادله صدق می کند، پس قابل قبول است.

$$\sqrt{x} - x = -20 \quad (\text{ب})$$

مرحله ی اول:

$$x \geq 0 \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

مرحله ی دوم:

(د)

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3} = 0$$

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow D = [3, +\infty)$$

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-3}$$

$$(\sqrt{2x+3})^2 = (\sqrt{x-3})^2 \Rightarrow 2x+3 = x-3 \Rightarrow x = -6 \notin D$$

غیر قابل قبول

چون ریشه ی به دست آمده در دامنه ی معادله صدق نمی کند، پس این ریشه غیر قابل قبول است.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$$

(ه)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+5})^2 = (5 - \sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow x+5 = 25 - 10\sqrt{x} + x$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \in D$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4+5} = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5$$

درست است. $x = 4$ جواب معادله است؛ چون هم در دامنه ی معادله و

هم در معادله صدق می کند.

(و) راه اول:

$$\sqrt{x} + 5 = -\sqrt{7x+1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 7x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$(\sqrt{x} + 5)^2 = (-\sqrt{7x+1})^2 \Rightarrow x + 10\sqrt{x} + 25 = 7x + 1$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x} = 6x - 24 \Rightarrow 5\sqrt{x} = 3x - 12 \Rightarrow (5\sqrt{x})^2 = (3x - 12)^2$$

$$\Rightarrow 25x = 9x^2 - 72x + 144 \Rightarrow 9x^2 - 97x + 144 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{97 \pm 65}{18} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \in D \\ x = \frac{16}{9} \in D \end{cases}$$

$$\sqrt{x} - x = -20 \Rightarrow \sqrt{x} = x - 20$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x - 20)^2$$

$$\Rightarrow x = x^2 - 40x + 400 \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{41 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 25 \in D \\ x = 16 \in D \end{cases}$$

مرحله ی سوم:

$$x = 25 \Rightarrow \sqrt{25} - 25 = -20 \Rightarrow 5 - 25 = -20 \Rightarrow -20 = -20$$

درست است.

$$x = 16 \Rightarrow \sqrt{16} - 16 = -20 \Rightarrow 4 - 16 = -20 \Rightarrow -12 = -20$$

نادرست است.

چون $x = 25$ هم در دامنه ی معادله و هم در معادله صدق می کند، پس $x = 25$ ریشه ی معادله است و چون $x = 16$ در معادله صدق نمی کند، پس این ریشه غیر قابل قبول است.

$$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1$$

(ج)

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow -2\sqrt{2x-1} = -4$$

$$\Rightarrow (-2\sqrt{2x-1})^2 = (-4)^2$$

$$\Rightarrow 4(2x-1) = 16 \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \in D$$

مرحله ی سوم:

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow 5 - 2\sqrt{2(\frac{5}{2})-1} = 1 \Rightarrow 5 - 2\sqrt{5-1} = 1$$

$$\Rightarrow 5 - 4 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

درست است.

$x = \frac{5}{2}$ جواب معادله است.

نادرست است. $x = 9 \Rightarrow \sqrt{9} + 5 = -\sqrt{7 \times 9 + 1} \Rightarrow 8 = -8$

نادرست است. $x = \frac{16}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{9}} + 5 = -\sqrt{7 \times \frac{16}{9} + 1} \Rightarrow \frac{19}{3} = \frac{11}{3}$

(ح)

این معادله جواب ندارد، زیرا ریشه‌های به دست آمده در معادله صدق نمی‌کنند.

راه دوم: با توجه به صورت معادله یعنی $\sqrt{x} + 5 = -\sqrt{7x+1}$ ملاحظه می‌کنیم، سمت چپ معادله یعنی $\sqrt{x} + 5$ همواره عددی بزرگ‌تر از صفر است و طرف راست معادله یعنی $-\sqrt{7x+1}$ همواره عددی منفی است و هیچ‌گاه عددی منفی با عددی بزرگ‌تر از صفر برابر نیست. بنابراین این معادله جواب ندارد.

$$3 = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \quad (ز)$$

چون $\sqrt{x}-5$ در مخرج کسر قرار دارد و مخرج کسر نباید برابر با صفر شود، پس برای یافتن دامنه‌ی جواب معادله، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

$$x-5 > 0 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow D = (5, +\infty)$$

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{1}{\sqrt{x}-5} \Rightarrow 3^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-5}\right)^2 \Rightarrow 9 = \frac{1}{x-5} \\ \Rightarrow 9 - \frac{1}{x-5} &= 0 \Rightarrow \frac{9(x-5)-1}{x-5} = 0 \\ \Rightarrow 9x - 45 - 1 &= 0 \Rightarrow x = \frac{46}{9} = 5\frac{1}{9} \in D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{46}{9} \Rightarrow 3 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{46}{9}}-5} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}-5} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\frac{1}{3}-5} \Rightarrow 3 = 3 \\ \text{درست است.} \end{aligned}$$

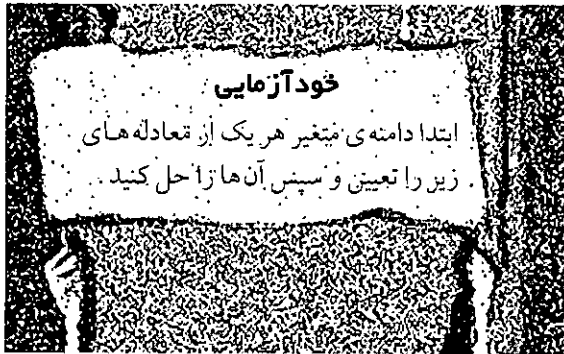
پس $x = \frac{46}{9}$ جواب معادله است، چون هم در معادله و هم در دامنه‌ی جواب معادله صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} &= 2 \\ x \geq 0 &\Rightarrow D = [0, +\infty) \\ \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})} &= 0 \\ \Rightarrow 4-2(4-x) &= 0 \Rightarrow 4-8+2x=0 \Rightarrow x=2 \in D \\ x=2 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})} = 2 \\ \Rightarrow \frac{4}{4-2} &= 2 \Rightarrow 2=2 \quad \text{درست است.} \end{aligned}$$

پس $x=2$ جواب معادله است؛ چون در دامنه‌ی جواب معادله و در خود معادله صدق می‌کند.

(ط)

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\sqrt{x} &= \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x^2 \times x} = \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x^3} = \sqrt{4} \\ \Rightarrow \sqrt{x^3} &= \sqrt{4} \quad ; \quad D=R \\ \sqrt{x^3} &= \sqrt{4} \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt[3]{4} \in D \\ x=2 &\Rightarrow \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{4} \quad \text{درست است.} \\ x=-2 &\Rightarrow \sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{4} \quad \text{درست است.} \\ \text{پس } x &= \pm \sqrt[3]{4} \text{ جواب معادله است.} \end{aligned}$$



$$21 + \sqrt{2x-7} = x \quad .1$$

$$2\sqrt{x+5} = x+2 \quad .2$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1 \quad .3$$

$$\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6 \quad .4$$

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4 \quad .5$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7 \quad .6$$

$$x + 12\sqrt{x} = 64 \quad .7$$

$$\frac{x-4}{\sqrt{x+2}} = x-8 \quad .8$$

$$\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2 \quad .9$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2} \quad .10$$

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \quad .11$$

$$\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4} \quad .12$$

$$\frac{4}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+3}}{5} = 2 \quad .13$$

(ی)

$$\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$$

$$\begin{cases} 10-2x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 10-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, 5)$$

با فرض $t = \sqrt{10-2x}$ داریم:

$$\frac{8}{t} - t = 2 \Rightarrow \frac{8-t^2-2t}{t} = 0 \Rightarrow t^2-2t+8=0 \Rightarrow t^2+2t-8=0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{10-2x} \Rightarrow 4 = 10-2x \Rightarrow x = 3 \in D$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{10-6}} - \sqrt{10-6} = 2 \Rightarrow 4-2=2 \quad \text{درست است.}$$

پس $x=3$ جواب معادله است.

$$t = -4 \Rightarrow -4 = \sqrt{10-2x}$$

چون طرف چپ معادله همواره منفی و طرف راست آن همواره نامنفی است و این امکانپذیر نیست، پس در این حالت معادله جواب ندارد.

