



معادله‌های مثلثاتی

محمد هاشم رستمی

$$\sin x + \cos^2 x = 0$$



حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی

دسته دوم. معادله‌هایی که صورت مشخصی دارند و راه حل آن‌ها نیز مشخص است. این معادله‌ها را معادله‌های مثلثاتی کلاسیک می‌نامند.

نکته بسیار مهم آن است که برای حل هر معادله غیر ساده مثلثاتی اعم از کلاسیک یا غیر کلاسیک، باید آن را به معادله یا معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کنیم و سپس این معادله‌های ساده مثلثاتی را حل کنیم.

نکته. حل معادله‌های مثلثاتی که شامل کمان مجهول هستند، مانند معادله $x + 2 \sin x = 0$ ، جداگانه بررسی خواهد شد.

حل معادله‌های مثلثاتی دسته اول

با وجود آن که این معادله‌های غیر ساده مثلثاتی، صورت و

هر معادله مثلثاتی غیر از معادله‌های چهارگانه $\sin X = a$, $(-1 \leq a \leq 1)$; $\cos X = b$, $(-1 \leq b \leq 1)$; $\operatorname{tg} X = c$, $(c \in \mathbb{R})$ و $\operatorname{cot} X = d$, $(d \in \mathbb{R})$ را معادله غیر ساده مثلثاتی می‌نامیم؛ مانند:

$$\sin^2 x + 2 \sin x = 0 \quad \text{و} \quad \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{و} \quad \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x + 2 \cos x = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2 x - \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$$

$$x + \sin x = 0$$

معادله‌های غیر ساده مثلثاتی را به این دو دسته کلی می‌توان

تقسیم کرد:

دسته اول. معادله‌هایی که فرم یا صورت مشخصی ندارند

و راه حل آن‌ها نیز مشخص نیست. این معادله‌ها را معادله‌های مثلثاتی غیر کلاسیک می‌نامند.

$$\cos \frac{2x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3k\pi}{2} + \frac{3\pi}{4};$$

$$1 + \cot gx = 0 \Rightarrow \cot gx = -1 \Rightarrow \cot gx = \cot g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های معادله داده شده عبارت‌اند از:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } x = \frac{3k\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \text{ و } x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

مثال ۳. معادله $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ را حل کنید.

حل: به کمک فاکتورگیری از عامل مشترک، معادله داده

شده را به صورت $A \times B = 0$ تبدیل و سپس معادله‌های ساده

مثلاثی $A = 0$ و $B = 0$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -\cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \times x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ معادله غیرممکن}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

پس جواب‌های معادله داده شده، عبارت‌اند از:

$$x = k\pi \text{ و } x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

نکته: معادله $\sin x + \cos x = 0$ به روش‌های دیگری نیز

قابل حل است.

مثال ۴. معادله $\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

حل: نسبت‌های مثلاثی یکسان و زاویه‌های داده شده،

راه حل مشخصی ندارند، اما می‌توان آن‌ها را به گونه‌ای، به صورت‌های زیر دسته‌بندی کرد:

۱. معادله‌هایی که به صورت $A \times B \times C \times \dots = 0$ یا قابل

تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A = 0$ ، $B = 0$ ، $C = 0$ و... است، معادله‌های ساده‌ی مثلاثی‌اند؛ مانند معادله‌ی مثلاثی

$$(3\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

برای حل این معادله‌ها، معادله‌های ساده‌ی مثلاثی $A = 0$ ،

$B = 0$ ، $C = 0$ و... را حل می‌کنیم. مجموعه‌ی جواب‌های کلی

این معادله‌های ساده، جواب‌های کلی معادله‌ی داده شده‌اند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\text{مثال ۱. معادله } (2\sin x - 1)(\cos x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$$

را حل کنید.

حل: داریم:

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6};$$

$$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \pi;$$

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

پس جواب‌های معادله داده شده عبارت‌اند از:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \pi \text{ و } x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

مثال ۲. معادله‌ی مثلاثی زیر را حل کنید.

$$\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{2x}{3} (1 + \cot gx) = 0$$

حل: داریم:

$$\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \frac{x}{3} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2};$$

تشکیل تصاعد حسابی داده اند: $2x = \frac{3x+x}{2}$ ؛ بنابراین با

استفاده از دستور تبدیل مجموع به حاصل ضرب،

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{داریم:}$$

$$\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} ;$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پس جواب های معادله داده شده، عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{2} \text{ و } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال ۵. معادله $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: $\cos 2x$ را بر حسب $\sin x$ می نویسیم (با استفاده از

دستور $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$) داریم:

$$1 - 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (-2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi ;$$

$$-2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

آزمون ۱. معادله زیر در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

$$(2 \sin x - 1)(4 \sin x - 5)(5 \sin x - 9) = 0$$

$$6(2) \quad 3(1)$$

$$2(4) \quad \text{صفر}(3)$$

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: داریم:

$$(2 \sin x - 1)(4 \sin x - 5)(5 \sin x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$4 \sin x - 5 = 0 \Rightarrow 4 \sin x = 5 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} > 1 \text{ جواب ندارد}$$

$$5 \sin x - 9 = 0 \Rightarrow 5 \sin x = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{9}{5} > 1 \text{ جواب ندارد}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{، بنابراین جواب های کلی معادله داده شده،}$$

$$\text{و } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ است.}$$

اکنون جواب های خصوصی موجود در بازه $[0, 2\pi]$ را

تعیین می کنیم:

k	x
-۱	$\frac{-11\pi}{6} < 0, \frac{-7\pi}{6} < 0$
۰	جواب $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
۱	$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2\pi, 2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$

همان طوری که دیده می شود، معادله تنها دو جواب در

بازه $[0, 2\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینه (۴) درست است.

نکته. معادله داده شده به صورت $A \times B \times C = 0$ است،

که در آن $A = 0$ و $B = 0$ و $C = 0$ معادله های ساده مثلثاتی اند.

از بین این معادله ها، که $2 \sin x - 1 = 0$ ، $4 \sin x - 5 = 0$ و

$5 \sin x - 9 = 0$ هستند، تنها معادله $2 \sin x - 1 = 0$ یا

$\sin x = \frac{1}{2}$ جواب دارد. از طرفی می دانیم که معادله ساده

مثلثاتی $\sin x = a$ و $(-1 < a < +1)$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب

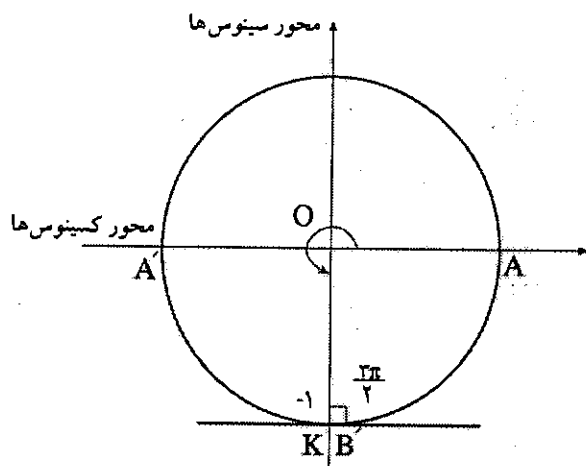
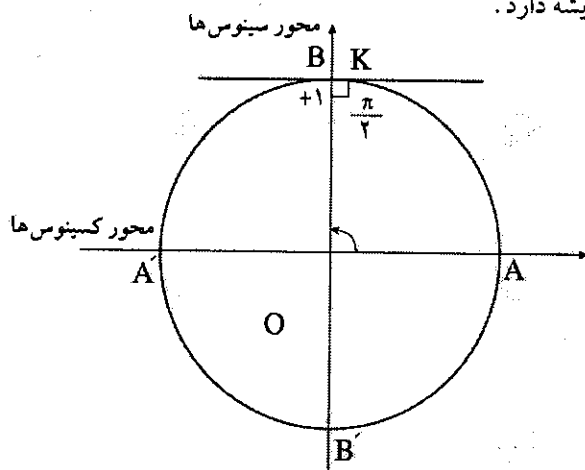
خصوصی دارد؛ زیرا اگر روی محور سینوس ها $\overline{OK} = a$ را

جدا کنیم و از k خطی موازی محور کسینوس ها رسم نماییم،

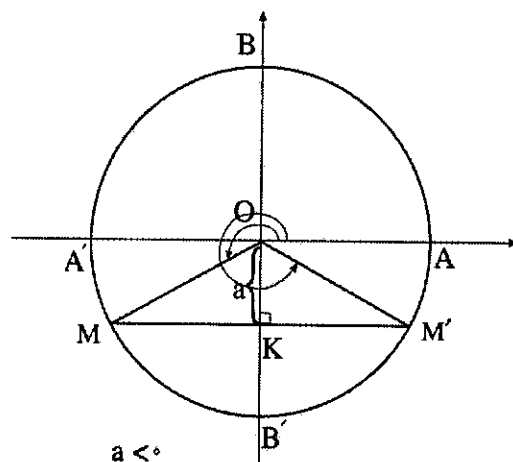
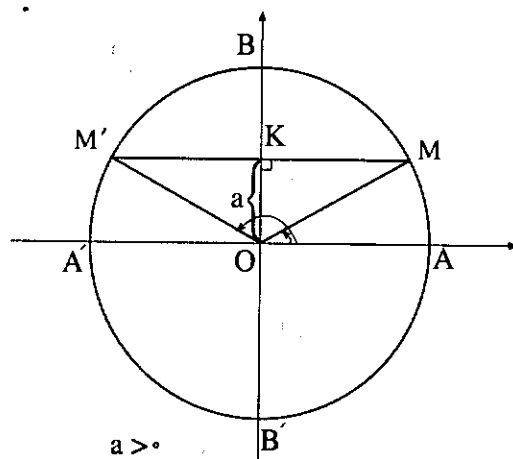
بنابراین بدون حل کردن معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ می توان گفت که این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دو ریشه دارد.

در حالت خاص

الف. اگر $a = 1$ ؛ یعنی $\sin x = 1$ باشد، نقطه k بر نقطه B انتهای کمان $+\frac{\pi}{4}$ منطبق می شود و نقطه های M و M' نیز بر این نقطه منطبق می شوند؛ یعنی معادله $\sin x = 1$ ریشه مضاعف $x = \frac{\pi}{2}$ دارد. پس این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ تنها یک ریشه دارد.



دایره مثلثاتی را در دو نقطه M و M' قطع می کند، که کمان های $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ جواب های مسأله اند؛ یعنی کمان هایی هستند که سینوس آن ها عدد a است.



حال اگر $a > 0$ باشد، انتهای کمان ها در ربع اول و دوم دایره مثلثاتی است؛ یعنی کمان های جواب مسأله به بازه $[0, \pi]$ تعلق دارند و اگر $a < 0$ باشد، انتهای کمان های جواب مسأله در ربع های سوم و چهارم دایره مثلثاتی قرار دارند؛ یعنی کمان های جواب مسأله به بازه $[\pi, 2\pi]$ یا $[-\pi, 0]$ تعلق دارند.

$$\sin 4x - \sin 2x = 2 \sin x \cos 3x$$

با استفاده از دستور زیر داریم:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$2 \sin x \cos 3x = \cos 3x \Rightarrow 2 \sin x \cos 3x - \cos 3x = 0 \\ \Rightarrow \cos 3x (2 \sin x - 1) = 0$$

معادله به صورت حاصل ضرب دو عامل مساوی صفر است، پس خواهیم داشت:

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3)$$

جواب کلی (۱) شامل جواب‌های کلی (۲) و (۳) نیز هست؛ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

آزمون ۴. معادله $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = \sin x \sin 2x$ در بازه

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right] \text{ چند ریشه دارد؟}$$

۴ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) صفر

۲ (۳)

کنکور دانشگاه آزاد - ۱۳۸۱

حل. با توجه به این که $\operatorname{tg} x$ به ازای ریشه‌های معادله

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } \operatorname{tg} 2x \text{ به ازای ریشه‌های معادله } 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{یا } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ تعریف نشده‌اند، داریم:}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = \sin x \sin 2x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sin x \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin x \sin 2x = \sin x \sin 2x \cos x \cos 2x$$

$$\sin x \sin 2x - \sin x \sin 2x \cos x \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x \sin 2x (1 - \cos x \cos 2x) = 0 \Rightarrow$$

ب. اگر $a = -1$ ، یعنی $\sin x = -1$ باشد، نقطه k بر نقطه

B' انتهای کمان $\frac{3\pi}{4}$ منطبق می‌شود و نقطه‌های M و M' نیز

بر این نقطه منطبق می‌شوند؛ یعنی معادله $\sin x = -1$ دارای

ریشه مضاعف $x = \frac{3\pi}{4}$ است. پس این معادله در بازه $[0, 2\pi]$

تنها یک ریشه دارد.

آزمون ۲. معادله $(2 \sin x + 1)(3 \sin x + 2) = 0$ در بازه

$[\pi, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۱ (۴)

۴ (۳)

کنکور پزشکی دانشگاه آزاد - ۱۳۸۳

حل: داریم:

$$(2 \sin x + 1)(3 \sin x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$3 \sin x + 2 = 0 \Rightarrow 3 \sin x = -2 \Rightarrow \sin x = -\frac{2}{3}$$

چون $-\frac{1}{2} < -\frac{2}{3} < -1$ و $-1 < -\frac{2}{3} < 0$ است، پس هریک از

این دو معادله در بازه $[\pi, 2\pi]$ دو جواب خصوصی متمایز

دارند، پس معادله داده شده روی هم چهار جواب در بازه

$[\pi, 2\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

آزمون ۳. جواب کلی معادله مثلثاتی زیر کدام است؟

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری سال ۱۳۸۱

حل: می‌دانیم که:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \cos 3x,$$

$x = \frac{3\pi}{4}$ قابل قبول نیستند (در دامنه تعریف تابع قرار ندارند)،

پس تنها دو ریشه قابل قبول $x = \pi$ و $x = 2\pi$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ وجود دارد؛ بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

نکته. معادله $\cos x \cos 2x = 1$ در صورتی جواب دارد که $\cos x = 1$ و $\cos 2x = 1$ یا $\cos x = -1$ و $\cos 2x = -1$ ؛ زیرا اگر قدر مطلق یکی از این دو مقدار کوچکتر از ۱ باشد، قدر مطلق دیگری باید بزرگتر از ۱ باشد، که این امکان پذیر نیست؛ زیرا مقدارهای $\cos x$ و $\cos 2x$ هر دو به بازه $[-1, 1]$ تعلق دارند.

معادله $\cos x \cos 2x = 1$ را به روش های دیگری هم می توان حل کرد که بعداً خواهیم دید.

ادامه حل معادله های غیر ساده مثلثاتی در شماره های آینده مجله خواهد آمد.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$1 - \cos x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos x \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x = 1, \cos 2x = 1$$

$$\text{یا } \cos x = -1, \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos x = 1 = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos 2x = 1 = \cos 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi,$$

$$\cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi,$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2}$ شامل بقیه جواب های کلی نیز

هست؛ اما این جواب کلی در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ چهار ریشه $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

$\pi, \frac{3\pi}{2}$ و 2π دارد، که دو ریشه آن، یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

معماهای فکری و منطقی



بچه های Cramer و Carter در چندین تیم قهرمانی مدرسه هم تیمی اند.

Cramer زمانی که شنید Carver قصد دارد در شب جشن اولیا و دانش آموزان مدرسه به خارج شهر برود، به خانم Carver تلفن و پیشنهاد کرد از پسر او نگهداری کند؛ اما پدر Jack قبلاً از او خواسته بود برود. دو خانواده Carter و Clark، که دوستان بسیار خوب یکدیگرند، زمانی که بچه هاشان به نامزدی یکدیگر درآمدند، خوشحال شدند.

نام خانوادگی هر یک چیست؟

BJane، Janice، Jack، Jasper، و Jem نام های پنج یار دبیرستانی است. نام خانوادگی آنان. نه لزوماً به این ترتیب، عبارت است از: Carter، Carver، Clark، Clayton، Cramer. مادر Jasper مرده است.

آقا و خانم Clayton به احترام یک عمه بسیار ثروتمند، هنگامی که ازدواج کردند، قرار گذاشتند اگر صاحب دختری شدند، نام او را Janice بگذارند.

پدر و مادر Jane هیچ گاه پدر و مادر Jack را ملاقات نکرده اند.

Cramer و Clayton، Carter و Clark

Cramer، Jasper، Jack، Carver، و Jem، به ترتیب نام های پسران و دختران هستند.

پاسخ: